Übungsaufgaben mit Lösungen findest du unter **www.mathegym.de** !

Exponentielles Wachstum

- **Wachstumsvorgänge**

Wachstum mit **konstantem Zuwachs (d)** pro gleichen (Zeit-)Schritt heißt **lineares** Wachstum.

Wachstum mit **konstantem Wachstumsfaktor (a)** pro gleichen (Zeit-)Schritt heißt **exponentielles** Wachstum.

Beschreibung des Bestands B(t) nach t Zeiteinheiten mit dem Anfangsbestand B(0):

B(t) = B(0) + t · d (lineare Funktion!)

Es gilt: **d = B(t+1) – B(t)**

d > 0 <=> Wachstum;
d < 0 <=> Abnahme

Graph: Gerade

B(t) = B(0) · a^t

Es gilt: $\mathbf{a = \frac{B(t+1)}{B(t)}}$

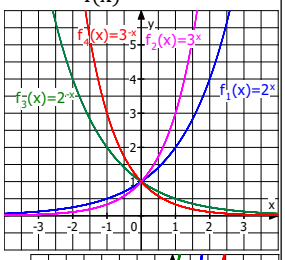
a > 0 <=> Wachstum;
0 < a < 0 <=> Abnahme

Graph: siehe Exponentialfunktion

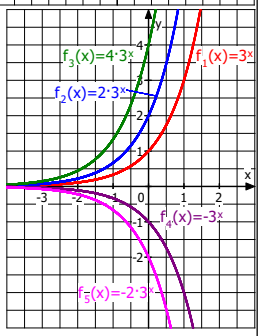
- **Exponentialfunktion**

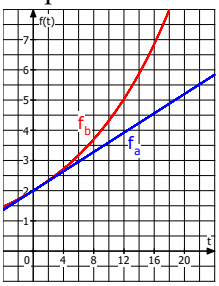
Grundlage zum Modellieren eines Wachstumsvorgang ist die **Exponentialfunktion** **f: x ↦ a^x**. Für den **Wachstumsfaktor a** gilt: $a \in IR^+\setminus\{1\}$ und $a = \frac{f(x+1)}{f(x)}$

Eigenschaften: D = IR; W = IR⁺; $f(0) = a^0 = 1$;
x-Achse ist waagrechte Asymptote;
a > 1: Graph ist monoton steigend;
0 < a < 1: Graph ist monoton fallend;
Graphen von $f(x) = a^x$ und $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ sind symmetrisch bzgl der y-Achse.



Die Graphen der Funktionen der Form **x ↦ b·a^x** entstehen durch **Streckung (b > 1)** bzw. **Stauchung (0 < b < 1)** der Graphen der Funktion **x ↦ a^x**. Diese Graphen schneiden die y-Achse im Punkt **S_y(0 | b)**. Ist **b < 0** werden die gestreckten Graphen zusätzlich an der **x-Achse gespiegelt**.





Bsp.1: Ein Kapital von 2000€ wird mit 8% p.a. (pro Jahr) verzinst:
f(t) = Kapital in 1000€; t = Zahl in Jahre
a) Verzinsung mit Zinseszins
→ $f_a(t) = 2\cdot(1+0{,}08)^t = 2\cdot 1{,}08^t$ (exp. Wachstum)
b) Die Zinsen werden nicht mitverzinst.
→ $f_b(t) = 2 + 0{,}08\cdot 2\cdot t = 2 + 0{,}16t$ (lin. Wachstum)

Bsp.2: Zahl der Jod-131–Kerne in einem radioaktiven Präparat in Abhängigkeit von der Zahl t der Tage: $f(t) = 2{,}7\cdot 10^{15}\cdot 0{,}917^t$. Gesucht: tägliche Änderung
$a - 1 = 0{,}917 - 1 = -0{,}083$ → Die Zahl der Kerne nimmt pro Tag um 8,3 % ab.

Logarithmen

- **Definition**

Die **Lösung** der Gleichung **a^x = b** ($a \in IR^+\setminus\{1\}$; $b \in IR^+$) wird **Logarithmus von b zur Basis a** genannt: **x = log_a (b)**. Also ist der Logarithmus von b zur Basis a derjenige **Exponent**, mit dem man die **Basis a potenzieren** muss, um **b** zu **erhalten**.
kurz: **a^x = b <=> x = log_a (b)**

*Fortführung des Bsp.2: Bestimme, nach welcher Zeit (**Halbwertszeit**) sich die Zahl der Kerne halbiert.*
→ $0{,}5\cdot 2{,}7\cdot 10^{15} = 2{,}7\cdot 10^{15}\cdot 0{,}917^t$ → $0{,}5 = 0{,}917^t$ → $t = \log_{0{,}917} 0{,}5 = 7{,}99\ldots$
→ Die Halbwertszeit beträgt etwa 8 Tage (TR!)

Es gelten folgende Beziehungen: **$\log_a(a^x) = x$**; **$a^{\log_a(x)} = x$**; **$\log_a(b^x) = x\cdot\log_a(b)$**
Bsp.: $\log_3(9^2) = 2\cdot\log(9) = 2\cdot 2 = 4$

- **Zehnerlogarithmus**

Der Logarithmus zur Basis 10 nennt man **Zehnerlogarithmus**: **$\log_{10}(b) = \lg(b)$**
Bsp.: $10^x = 10000000$ <=> $x = \lg(10000000) = 7$, da $10^7 = 10000000$
$\lg(0{,}001) = -3$, da $0{,}001 = 10^{-3}$

- **Exponentialgleichung**

Exponentialgleichungen sind Gleichungen mit einer Unbekannten x im Exponenten. Diese kann man durch **Logarithmieren** beider Seiten **lösen**.

Bsp.: $3^{2x} + 1 = 7 \iff 3^{2x} = 6 \iff$ *Anwendung der Logarithmusdefinition:*

$\log_3(3^{2x}) = \log_3(6) \iff 2x = \log_3(6) \iff x = \log_3(6) : 2 \approx 0{,}82$

$2^{-x} \cdot 3^x = 10 \iff \frac{1}{2^x} \cdot 3^x = 10 \iff \left(\frac{3}{2}\right)^x = 10 \iff$ *Alternative: Anwendung des Zehnerlogarithmus:* $\lg(1{,}5^x) = \lg(10) \iff x \cdot \lg(1{,}5) = \lg(10) \iff x = \frac{\lg(10)}{\lg(1{,}5)} \approx 5{,}68$

Zusammengesetzte Zufallsexperimente

Ein Zufallsexperiment, das aus mehreren Teilexperimenten besteht, nennt man **zusammengesetztes oder mehrstufiges Zufallsexperiment**.

- **Urnenmodelle**

Viele Zufallsexperimente lassen auf sogenannte **Urnenmodelle** zurückführen. Dadurch erhält man einen besseren Überblick über das Experiment.

Beispiel:

Bei einem Fußballturnier werden zwei Gewinnspiele angeboten, um Geld für die Vereinskasse einzunehmen. Bei jedem der Gewinnspiele gewinnt der Spieler einen Preis beim Wort „TOR“.

<u>Spiel 1:</u>
Ein Glücksrad mit drei gleich großen Feldern, auf denen die Buchstaben O, R und T stehen, wird dreimal gedreht. Es werden nacheinander die Buchstaben notiert, bei denen der Zeiger des Glücksrads stehen bleibt.

<u>Spiel 2:</u>
Auf drei Karten stehen die Buchstaben O, R und T. Die Karten werden gemischt und der Spieler wählt aus den verdeckten Karten nacheinander dreimal eine Karte aus und legt sie der Reihenfolge nach aufgedeckt nebeneinander.

*Umsetzung in einem **Urnenmodell**:*

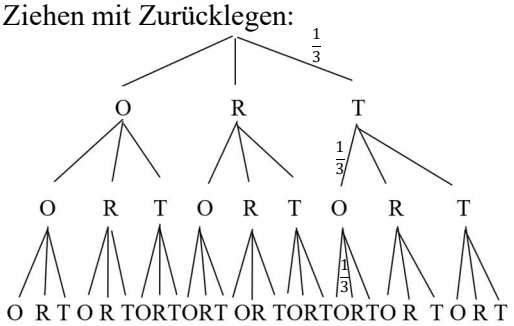
*In einer Urne befinden sich drei Kugeln, die mit den Buchstaben O, R und T beschriftet sind. Es wird dreimal nacheinander eine Kugel aus der Urne gezogen und diese Kugel wieder **zurückgelegt**.*

*In einer Urne befinden sich drei Kugeln, die mit den Buchstaben O, R und T beschriftet sind. Es wird dreimal nacheinander eine Kugel aus der Urne gezogen und diese Kugel **nicht** wieder **zurückgelegt**.*

- **Veranschaulichung am Baumdiagramme**

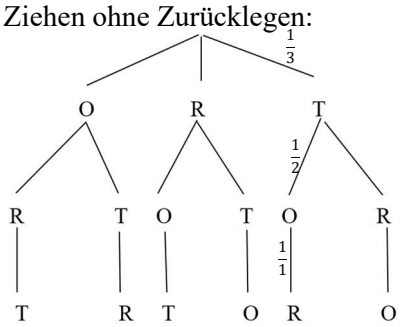
Baumdiagramm:

Ziehen mit Zurücklegen:



Da die **Anzahl der Kugeln gleichbleibt**, **ändern** sich die **Wahrscheinlichkeiten** von Stufe zu Stufe **nicht**.

Ziehen ohne Zurücklegen:



Da sich die **Anzahl der Kugeln** bei jedem Ziehen **verringert**, **ändern** sich die **Wahrscheinlichkeiten** von Stufe zu Stufe.

An jeweils einem Pfad sind beispielhaft die Wahrscheinlichkeiten geschrieben.

- **Pfadregeln**

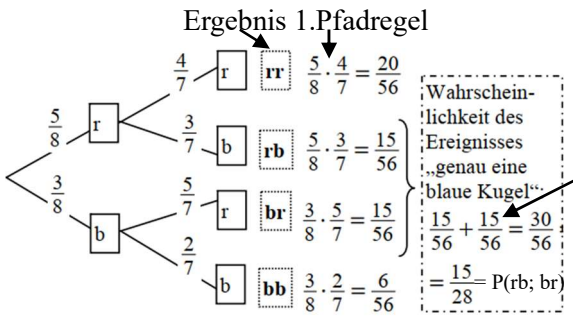
1.Pfadregel: Wahrscheinlichkeit eines **Ergebnisses** = **Produkt** der Wahrscheinlichkeiten **längs** des zugehörigen **Pfades**

Bsp.: Wahrscheinlichkeit für das Wort „TOR“ beim Beispiel zum Fußballturnier mit Hilfe der 1.Pfadregel:

Spiel 1: $P(TOR) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$ *Spiel 2:* $P(TOR) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{6}$

2.Pfadregel: Wahrscheinlichkeit eines **Ereignisses** = **Summe** der Wahrscheinlichkeiten für **alle Pfade**, die zu dem Ereignis gehören

Bsp.: Aus einer Urne mit Inhalt 5 rote Kugeln und 3 blaue Kugeln werden nacheinander 2 Kugeln gezogen.



P(„mindestens eine rote Kugel“)=
= 1 – P(„gar keine rote Kugel“) =
= 1 – P(bb) = 1 - $\frac{6}{56} = \frac{25}{28}$

- **Simulation**

Da das reale Experiment oft aufwendig ist oder die Wahrscheinlichkeit mit den bekannten Mitteln nicht berechnet werden kann, kann man versuchen, das Experiment unter vereinfachten Bedingungen mit geeigneten Hilfsmitteln (Münzen, Würfeln, Kugeln, Zufallszahlen, …) nachzuahmen. Diese Methode nennt man **Simulation**.
Dabei kann die **relative Häufigkeit** für das Eintretens eines Ereignisses bei einer Simulation als **Schätzwert** für die **Wahrscheinlichkeit** des ursprünglichen Ereignisses verwendet werden.

Bsp.: Bei einem Multiple-Choice-Test mit 10 Fragen gibt es zu jeder Frage jeweils sechs Antworten, von denen genau eine richtig ist. Wer mehr als die Hälfte der Fragen richtig beantwortet, hat den Test bestanden. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass man den Test besteht, auch wenn man bei jeder Frage wahllos eine Antwort ankreuzt.

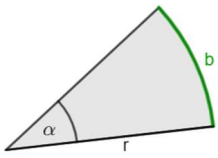
Simulation: Ein Würfel wird zehnmal geworfen. Die Augenzahl 1 steht für eine richtig beantwortete Frage. Werden mehr als fünf Einser geworfen, so stellt dies einen bestandenen Test dar. Das zehnfache Würfeln wird sehr oft wiederholt (z.B. 100-mal) und die Anzahl der „bestandenen Tests“ gezählt. Die relative Häufigkeit $\frac{\text{Anzahl der bestandenen Tests}}{\text{Anzahl der Durchführungen}}$ *ist ein Schätzwert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit.*

Sinus und Kosinus für beliebige Winkel

- **Bogenlänge**
- **Bogenmaß**

Bogenlänge b: **Länge** des **Kreisbogens** eines Kreissektors
(Radius r, Mittelpunktswinkel α)

$$\mathbf{b = \frac{\alpha}{360°}\cdot 2r\pi = \frac{\alpha}{180°}\cdot r\pi}$$



Bsp.: r = 2cm, α = 44° => $b = \frac{44°}{180°}\cdot 2cm\cdot\pi \approx 1{,}5cm$

Bogenmaß x: Bogenlänge zum **Einheitskreis** (r = 1)
Die **Größe** eines **Winkels** kann in **Gradmaß** (Taschenrechner: DEG/D) oder **Bogenmaß** (TR: RAD/R) angeben werden.

Umrechnung: **α (in Gradmaß)** $\xrightarrow{\cdot\frac{\pi}{180°}}$ $\xleftarrow[\cdot\frac{180°}{\pi}]{}$ **x (in Bogenmaß)**

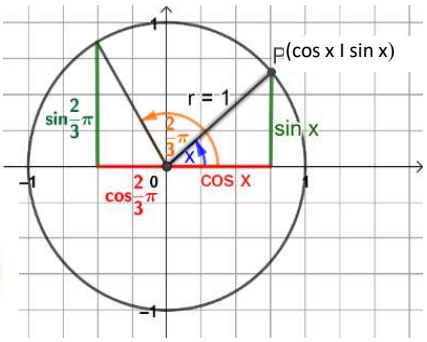
Bsp.: $\alpha = \mathbf{360°} \Rightarrow x = 360°\cdot\frac{\pi}{180°} = \mathbf{2\pi}$; $\alpha = \mathbf{180°} \Rightarrow x = 180°\cdot\frac{\pi}{180°} = \boldsymbol{\pi}$

$\alpha = 125° \Rightarrow x = 125°\cdot\frac{\pi}{180°} = \frac{25}{36}\pi \approx 2{,}18$

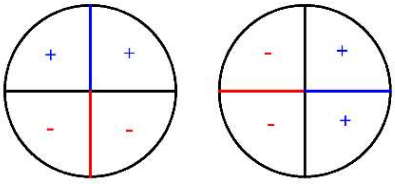
$x = 2 \Rightarrow \alpha = 2\cdot\frac{180°}{\pi} \approx 114{,}59°$; $x = \frac{2}{5}\pi \Rightarrow \alpha = \frac{2}{5}\pi\cdot\frac{180°}{\pi} \approx 72°$

- **Bogenmaß bei Sinus und Kosinus**

Entsprechend zum Sinus und Kosinus zu Winkelgrößen im Gradmaß (vgl. 9.Klasse) kann man auch Winkeln im **Bogenmaß Sinus- und Kosinuswerte** zuordnen.



Für die Vorzeichen gilt:

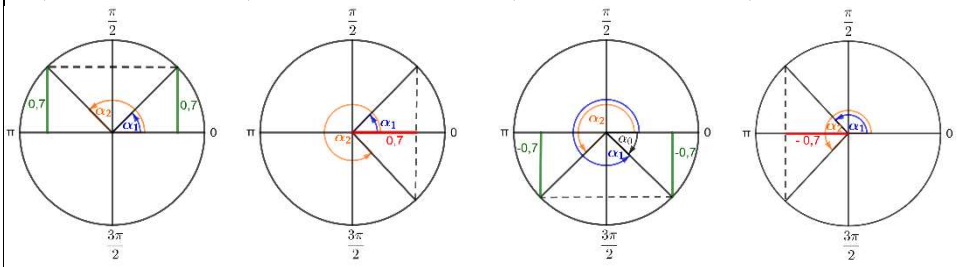


Nach einer bzw. mehreren **Volldrehung(en)** erreicht der Punkt P wieder seinen Ausgangspunkt. Es gilt: **$\sin(x + 2\cdot k\cdot\pi) = \sin(x)$** und **$\cos(x + 2\cdot k\cdot \pi) = \cos(x)$** $(k\in\mathbb{Z})$

Ein **negativer Winkel** entspricht einem Winkel, der **im Uhrzeigersinn** gerichtet ist.

Bsp.: Bestimme im Intervall $[-2\pi; 4\pi]$ alle Winkel im Bogen, für die gilt (Verwende am TR $\sin^{-1}$ bzw. $\cos^{-1}$. Stelle im TR das Bogenmaß (RAD/R) ein):

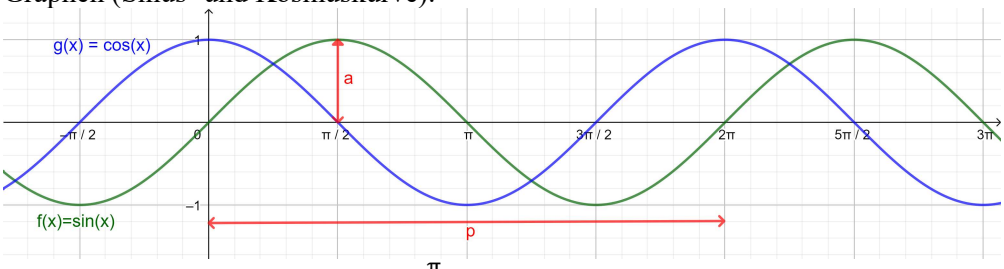
a) $\sin\alpha = 0{,}7$ *b) $\cos\alpha = 0{,}7$* *c) $\sin\alpha = -0{,}7$* *d) $\cos\alpha = -0{,}7$*



TR: $\alpha_1 \approx 0{,}78$	*TR: $\alpha_1 \approx 0{,}80$*	*TR: $\alpha_1 \approx -0{,}78$*	*TR: $\alpha_1 \approx 2{,}35$*
$\alpha_2 = \pi - \alpha_1 \approx 2{,}37$	$\alpha_2 = 2\pi - \alpha_1 \approx 5{,}49$	$\alpha_2 = \pi - \alpha_1 \approx 3{,}92$	$\alpha_2 = 2\pi - \alpha_1 \approx 3{,}94$
$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\pi \approx 7{,}06$	$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\pi \approx 7{,}08$	$\alpha_3 = 2\pi + \alpha_1 \approx 5{,}51$	$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\pi \approx 8{,}63$
$\alpha_4 = \alpha_2 + 2\pi \approx 8{,}65$	$\alpha_4 = \alpha_2 + 2\pi \approx 11{,}77$	$\alpha_4 = \alpha_2 + 2\pi \approx 10{,}20$	$\alpha_4 = \alpha_2 + 2\pi \approx 10{,}22$
$\alpha_5 = \alpha_1 - 2\pi \approx -5{,}50$	$\alpha_5 = \alpha_1 - 2\pi \approx -5{,}49$	$\alpha_5 = \alpha_3 + 2\pi \approx 11{,}79$	$\alpha_5 = \alpha_1 - 2\pi \approx -3{,}94$
$\alpha_6 = \alpha_2 - 2\pi \approx -3{,}92$	$\alpha_6 = \alpha_2 - 2\pi \approx -0{,}80$	$\alpha_6 = \alpha_2 - 2\pi \approx -2{,}37$	$\alpha_6 = \alpha_2 - 2\pi \approx -2{,}35$

- **Grundfunktionen sin(x) und cos(x)**

Die Funktionen, bei denen man jeder reellen Zahl x, interpretiert als Bogenmaß, eindeutig ihren Sinuswert sin(x) bzw. ihren Kosinuswert cos(x) zuordnet, heißen **Sinusfunktion** (**f: x↦sin(x)**) und **Kosinusfunktion** (**g: x↦sin(x)**) mit **Definitionsmenge D = IR** und **Wertemenge W = [-1; 1]**.
Die Funktionen sind periodisch (Funktionswerte wiederholen sich immer im gleichen Abstand) mit der **Periodenlänge p = 2π** und haben die **Amplitude a = 1** ("maximaler Ausschlag nach oben oder unten").
Graphen (Sinus- und Kosinuskurve):



Verschiebt man die Sinuskurve um $\frac{\pi}{2}$ in negative x-Richtung, so erhält man die Kosinuskurve: **$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$**

Eigenschaften: $(k\in\mathbb{Z})$

	Symmetrie	Nullstellen	x-Koordinate der Hochpunkte	x-Koordinate der Tiefpunkte
x↦sin(x)	**punktsymmetrisch** zum Ursprung	**$k\cdot\pi$** $(\ldots,-2\pi,-\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots)$	$\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$ $(\ldots,-\frac{7}{2}\pi,-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi, \ldots)$	$\frac{3}{2}\pi + k\cdot 2\pi$ $(\ldots,-\frac{5}{2}\pi,-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \ldots)$
x↦cos(x)	**achsensymmetrisch** zur y-Achse	$\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$ $(\ldots,-\frac{3}{2}\pi,-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi,\ldots)$	**$k\cdot 2\pi$** $(\ldots,-4\pi,-2\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots)$	**$\pi + k\cdot 2\pi$** $(\ldots,-3\pi,-\pi, \pi, 3\pi, \ldots)$

- **allgemeine Sinusfunktion**

allgemeine Sinusfunktion: **$f: x \mapsto a\cdot\sin(b\cdot(x + c)) + d$** $(a,b\in IR\setminus\{0\}; c,d\in IR)$

Bedeutung der Parameter/**Einfluss** der Parameter auf die Sinuskurve
a: **Streckung** (**a > 0**) bzw. **Stauchung** (**a < 0**) mit Faktor **a** in **y-Richtung**;

a < 0 → Streckung/Stauchung entsprechend |a| und zusätzliche **Spiegelung** an der **x-Achse; Amplitude |a|**

b: **Streckung (0 < b < 1)** bzw. **Stachung (b > 0)** mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ in **x-Richtung;**

b < 0 → Streckung/Stauchung entsprechend |b| und zusätzliche **Spiegelung** an der **y-Achse**; **Periode/Periodenlänge p =** $\frac{2\pi}{|b|}$

c: **Verschiebung** um **|c|** in x-Richtung nach **rechts (c < 0)** bzw. **links (c > 0)**

d: **Verschiebung** um **|d|** in y-Richtung nach **oben (d > 0)** bzw. **unten (d < 0)**

allgemein gilt: **D = IR**; **W = [d - |a|; d + |a|]**

Bsp.: $f(x) = 2\cdot\sin(\frac{\pi}{2}(x-1{,}5)) + 1$ => $a = 2,\ b = \frac{\pi}{2},\ c = -1{,}5,\ d = 1$

Periode: $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$; *Amplitude: a = 2; Wertemenge: W = [1–2; 1+2] = [-1; 3]*

Der Graph der Sinusfunktion wird mit dem Faktor 2 in y-Richtung und um $\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$ *in x-Richtung gestreckt. Anschließend wird er um 1,5 nach rechts und um 1 nach oben verschoben.*

Ganzrationale Funktionen

- **Definition**

Eine **ganzrationale Funktion (grF)** ist eine reelle Funktion, deren Funktionsterm sich als **Polynom** schreiben lässt, also als Summe aus Potenzen von x, die jeweils mit einem reellen Koeffizienten multipliziert sind: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 x^0$ ($n \in IN$)
Der **größte Exponent** von x heißt **Grad** der ganzrationalen Funktion.

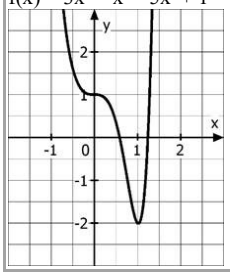
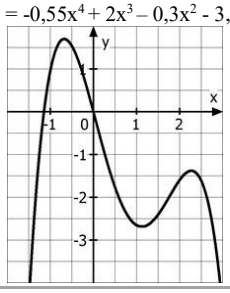
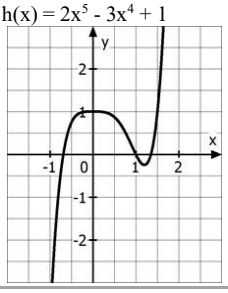
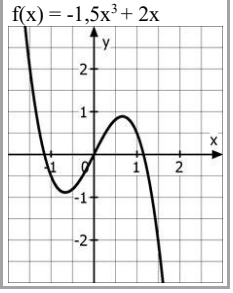
Bsp.: $f(x) = 2x^7 - 3{,}23x^6 + \sqrt{2}x - \frac{2}{3}$ *(Grad 7; Koeffizienten: 2, -3,23,* $\sqrt{2}, -\frac{2}{3}$*)*

$g(x) = x^3 - x^2 - 6x$ *(Grad 3; Koeffizienten; 1, -1, -6)*

Durch **Faktorisieren** erhält man die **Nullstellenform**: $g(x) = x(x-2)(x+3)$
→ Eine ganzrationale Funktion vom **Grad n** hat **höchstens n Nullstellen**.

- **Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs**

Das Verhalten für **x →± ∞** wird durch **den Summanden mit dem höchsten vorkommenden Exponenten** bestimmt**.**

$a_n > 0$ und n gerade	$a_n < 0$ und n gerade	$a_n > 0$ und n ungerade	$a_n < 0$ und n ungerade
„Von links oben nach rechts oben“	„Von links unten nach rechts unten“	„Von links unten nach rechts oben“	„Von links oben nach rechts unten“
$f(x) = 3x^6 - x^4 - 5x^3 + 1$ 	$f(x) = -0{,}55x^4 + 2x^3 - 0{,}3x^2 - 3{,}8x$ 	$h(x) = 2x^5 - 3x^4 + 1$ 	$f(x) = -1{,}5x^3 + 2x$ 

- **Nullstellen**

Die **Nullstellen (Nst)** entsprechen den Lösungen der Gleichung **f(x) = 0**.
Je nach Darstellungsform des Funktionsterms bieten sich unterschiedliche Lösungsstrategien an.

(1) Lösen linearer Gleichungen (sinnvolle Anwendung: Grad 1, d.h. lineare Funktion)
Bsp.: $11x + 7 = 0 \Rightarrow 11x = -7 \Rightarrow x = -\frac{7}{11}$

(2) Ein Produkt ist genau dann null, wenn ein Faktor null ist. (sinnvolle Anwendung: faktorisierte Form des Funktionsterms)

- **Vielfachheit**

Der **Exponent** eines Faktors der faktorisierten Form gibt die **Vielfachheit** der entsprechenden **Nullstelle** an.

Bsp.: $0{,}005 \cdot (x-2) \cdot \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 \cdot (x+5)^3 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 2\ (einfache\ Nst); x_2 = -\frac{1}{2}(doppelte\ Nst); x_3 = -5\ (dreifache\ Nst)$

(3) Ausklammern einer Potenz der Variablen und/oder einer Konstanten (bevorzugte Anwendung: Es kommen nur Potenzen von x mit Exponenten größer gleich 1 vor ($a_0 = 0$).) *Bsp.:* $0{,}003x^5 + 0{,}018x^4 = 0 \Rightarrow 0{,}003x^4 \cdot (x+6) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0\ (vierfach)\ ; x_2 = -6\ (einfach)$

(4) flexibles Lösen quadratischer Gleichungen (=> Grad 2!)

(4.1) Spezialform: $f(x) = a_2x^2 + a_1x$ ($a_0 = 0$) => Ausklammern

Bsp.: $5x^2 - 10x = 0 \quad \Rightarrow 5x \cdot (x-2) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$

(4. 2) Spezialform: $f(x)=a_2x^2+a_0$ ($a_1 = 0$) => Auflösen nach x^2

Bsp.: $4x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; x_2 = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4. 3) Spezialform: binomische Formel

Bsp.: $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ => $x = \frac{1}{2}$ *(doppelte Nullstelle)*

(4. 4) allgemein (keiner der vorherigen Spezialfälle):

$f(x) = ax^2 + bx + c$ => Lösungsformel: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4}}{2a}$

Bsp.: $x^2 + 1{,}8x - 0{,}4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1{,}8 \pm \sqrt{(1{,}8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-0{,}4)}}{2} = \frac{-1{,}8 \pm 2{,}2}{2} \Rightarrow x_1 = 0{,}2; x_2 = -2$

(5) Lösen von Potenzgleichungen (bevorzugte Anwendung: $f(x) = x^n - a_0$)

Bsp.: $x^4 - 6{,}25 = 0 \quad \Rightarrow x^4 = 6{,}25 \quad \Rightarrow x = \sqrt[4]{6{,}25} = 0{,}5$

- **Substitution biquadratischer Gleichungen**

(6) **Substitution** von x^2 durch z (Anwendung: **biquadratische Funktionen** $\mathbf{f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0}$)

Bsp.: $6x^4 - 5x^2 - 1 = 0$ => *Substitution mit* $z = x^2$: $6z^2 - 5z - 1 = 0$

=> *mit Lösungsformel:* $z_1 = 1$; $z_2 = -\frac{1}{6}$ => *Rücksubstitution:* $z_1 = 1$ => $x^2 = 1$ => $x_1 = 1$; $x_2 = -1$

bzw. $z_2 = -\frac{1}{6}$ => $x^2 = -\frac{1}{6}$ ↯ *Keine weiteren Lösungen!*

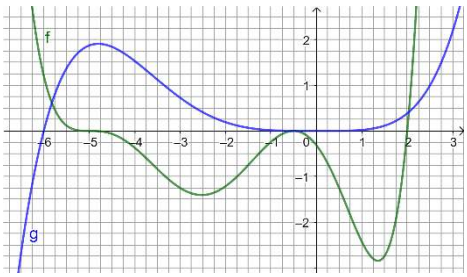
- **Bedeutung der Vielfachheit für den Graphen**

Nullstellen mit **gerader** Vielfachheit => G_f **schneidet** dort die x-Achse.
Nullstellen mit **ungerader** Vielfachheit => G_f **berührt** dort die x-Achse.
Je größer die Vielfachheit, **desto flacher** verläuft G_f in der Umgebung der Nullstellen.
Eine ganzrationale Funktion vom **Grad n**, besitzt **höchstens n Nullstellen** (jeweils mit ihren Vielfachheiten gezählt.

Bsp.: $f(x) = 0{,}005 \cdot (x-2) \cdot \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 \cdot (x+5)^3 = 0{,}005x^6 + \cdots$

Ausmultiplizieren: $f(x) = 0{,}005 \cdot x^6 + \ldots$
=> *"von links oben nach rechts oben";*
Vielfachheit siehe Beispiel zu (2)

$g(x) = 0{,}003x^5 + 0{,}018x^4$
$= 0{,}003 \cdot x^4 \cdot (x+6)$
=> *"von links unten nach rechts oben";*
Vielfachheit siehe Beispiel zu (3)



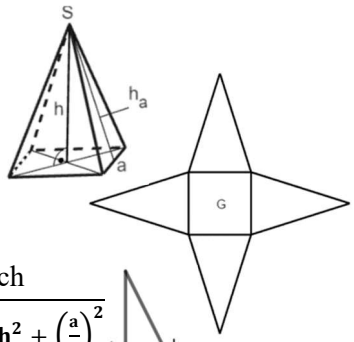
- **Symmetrieverhalten**

Der Graph einer Funktion f ist genau dann
- **achsensymmetrisch zur y-Achse**, wenn für alle $x \in D$ gilt: $\mathbf{f(-x) = f(x)}$.
  D.h. eine ganzrationale Funktion hat **nur gerade Exponenten. => gerade Funktion** ($x^0 = 1$ ist gerade!) *Z.B.* $f(x) = 3x^8 + 0{,}4x^4 - 0{,}7$
- **punktsymmetrisch zum Ursprung**, wenn für alle $x \in D$ gilt: $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$.
  D.h. eine ganzrationale Funktion hat **nur ungerade Exponenten. => ungerade Funktion.** *Z.B.* $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + x$

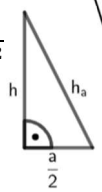
Raumgeometrie

- **Pyramide**

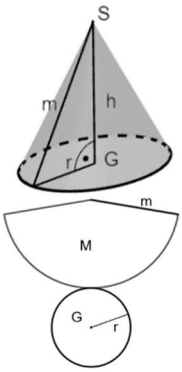
Pyramide
Grundfläche G: Vieleck bzw. n-Eck
Mantelfläche M: Fläche aller n Dreieck, die an die Grundfläche grenzen
Höhe h: Abstand der Grundfläche zur Spitze



Pyramidenvolumen: $\mathbf{V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h}$
Pyramidenoberflächeninhalt: **O = G + M**
Für eine quadratische Pyramide mit Seitenlänge a gilt nach "Pythagoras" für die Höhe h_a der Seitendreiecke: $\mathbf{h_a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}$



- **Kegel**



Kegel
Grundfläche G: Kreis mit Radius r
Mantelfläche M: Kreissektor mit **Mantellinie** m
Kegelvolumen: $\mathbf{V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2\pi \cdot h}$
Beim geraden Kegel (Spitze liegt senkrecht über dem Mittelpunkt des Kreises) gilt:
Manteloberflächeninhalt: **M = r·m·π**
Kegeloberflächeninhalt: **O = G + M =** $\mathbf{r^2\pi + r \cdot m \cdot \pi}$
Für die Mantellinie ergibt sich nach "Pythagoras": $\mathbf{m = \sqrt{r^2 + h^2}}$

- **Rotations-körper**

Ein gerader Kegel kann man als **Rotationskörper** auffassen:
Rotiert ein **rechtwinkliges Dreieck** um eine Kathete, so entsteht ein **Kegel**.
Weiteres Beispiel:
Lässt man ein **Rechteck** um eine Seite rotieren, so entsteht ein Zylinder.

Bsp.: Berechne Volumen und Oberfläche für folgende Körper, die alle die Höhe 3,0 cm haben:
a) quadratischen Pyramide mit Seitenlänge a = 4,0 cm
b) Kegel mit Grundkreisradius r = 4,0 cm

Lösung: a) $G = (4cm)^2 = 16cm^2$; $V = \frac{1}{3} \cdot 16cm^2 \cdot 3cm = 16cm^3$

$$O = 16cm^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4cm \cdot \sqrt{(3cm)^2 + \left(\frac{4c}{2}\right)^2} = 16cm^2 + 8cm \cdot \sqrt{13}cm \approx 44{,}8cm^2$$

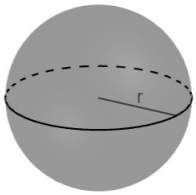
b) $G = (4cm)^2 \cdot \pi = 16\pi\ cm^2$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 16\pi\ cm^2 \cdot 3cm = 16\pi\ cm^3 \approx 50cm^3$$

$$O = 16\pi\ cm^2 + 4cm \cdot \pi \cdot \sqrt{(4cm)^2 + (3cm)^2} = 36\pi\ cm^2 \approx 113\ cm^2$$

- **Kugel**

Für eine **Kugel** mit Radius r gilt:
Volumen: $\mathbf{V = \frac{4}{3} \cdot r^3\pi}$
Oberfläche: $\mathbf{O = 4 \cdot r^2\pi}$



Bsp.: r = 3cm => $V = \frac{4}{3} \cdot (3cm)^3\pi = 36\pi\ cm^3 \approx 113\ cm^3$,
$O = 4 \cdot (3cm)^2\pi = 36\pi\ cm^2 \approx 113\ cm^2$