Gymnasium Stein	**LÖSUNGEN** zu den Aufgaben zum Grundwissenkatalog Mathematik der **9. Jahrgangsstufe**

1) a) $\sqrt{x^4} + \frac{\sqrt{12x^2}}{2} - x^2 = x^2 + \frac{2\sqrt{3}|x|}{2} - x^2 = \sqrt{3}|x|$ b) $\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2 - x^2 = x^2 - 4 - x^2 = -4$

c) $\sqrt{x^2-4} - x$ kann nicht vereinfacht werden!

d) $\sqrt{980\,000\,x^3y^8} = \sqrt{2 \cdot 49 \cdot 10^4 \cdot x \cdot x^2 \cdot (y^4)^2} = 7 \cdot 10^2 \cdot x \cdot y^4 \sqrt{2x} = 700xy^4\sqrt{2x}$

(Betragsstriche bei x vor der Wurzel hier unnötig, da für x<0 $\sqrt{x}$ nicht definiert wäre)

e) $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$ f) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{27})\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{15} + 3$ g) $\frac{\sqrt{3x+x^2}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{3x+x^2}{x}} = \sqrt{3+x}$

h) $\frac{1}{\sqrt{x+3}} = \frac{1\cdot\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x+3}} = \frac{\sqrt{x+3}}{x+3}$ i) $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) = x - 4$ k) $\sqrt{4x^2+12x+9} = \sqrt{(2x+3)^2} = |2x+3|$

2) a) Radikand $6 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq x \rightarrow D =]-\infty; 2]$; b) $6y > 0$ (Wurzel und Nenner) $\Leftrightarrow y > 0 \rightarrow D = IR^+$

c) D = IR, denn $x^2 + 4 > 0$ für alle $x \in IR$; d) D = IR, denn Nenner nie 0 und Radikand = 5 > 0

e) $x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4 \rightarrow D =]4; \infty[$ f) Nenner $= x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \neq 0 \rightarrow D = IR \setminus \{-2; 2\}$

g) $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 4 \Leftrightarrow |x| \geq 2 \rightarrow D =]-\infty; -2] \cup [2; \infty[$ (= IR \ ] –2; 2 [ )

3) a) $\sqrt{x^{\frac{1}{6}} : \sqrt{x}} = \sqrt{x^{\frac{1}{6}} : x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}} = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{6}} \left(= \frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)$ b) $\sqrt[6]{x^{-2}} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{-\frac{2}{6}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = x^0 = 1$

c) $5\sqrt{x^{-3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{x^3}} = 5\sqrt{x^{-3}} \cdot \sqrt{x^{-3}} = 5x^{-3}$ *(nach Definition!)* d) $(16p^8)^{\frac{3}{4}} = \left((16p^8)^{\frac{1}{4}}\right)^3 = (2p^2)^3 = 8p^6$

e) $\sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{x}}} = \left(x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(x \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(x \cdot x^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{4}}$

f) $\sqrt[3]{8x^6} \cdot \left(x^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{10}{3}} = (8x^6)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot x^{6\cdot\frac{1}{3}} \cdot x^{-2} = 2x^2 \cdot x^{-2} = 2x^0 = 2$ *(mit $x^0 = 1$)*

g) $y^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-0,75} \cdot \left(\sqrt[4]{y}\right)^5 = y^{-\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)} \cdot y^{\frac{5}{4}} = y^{-\frac{5}{4}} \cdot y^{\frac{5}{4}} = y^0 = 1$ *(mit $y^0 = 1$)*

4) Carlo hat die Exponenten multipliziert. Das Produkt der Exponenten ist 1 und daher sein Ergebnis a. Nachdem jedoch zwei Potenzen mit gleicher Basis multipliziert werden sollen, müssen die Exponenten addiert werden: $a^{\frac{3}{4}+\frac{4}{3}} = a^{\frac{9}{12}+\frac{16}{12}} = a^{\frac{25}{12}}$.

5) a) $f(x) = -x^3$, $g(x) = -0,5x^5$ b) $f(x) = 4x^4$, $g(x) = 4x^7$ c) $f(x) = -x^4$, $g(x) = -5x^{10}$ d) $f(x) = x^3$, $g(x) = \frac{2}{5}x^{11}$

6) A -> 4: Aufgrund des geraden Exponenten ist der Graph achsensymmetrisch und aufgrund des positiven Koeffizienten a = 1 verläuft der Graph von links oben nach rechts oben.

B -> 1: Die Funktion ist eine lineare Funktion, daher ist der Graph eine Gerade.

C -> 3: Aufgrund des geraden Exponenten ist der Graph achsensymmetrisch und aufgrund des negativen Koeffizienten $a = -\frac{1}{4}$ wird der Graph an der x-Achse gespiegelt und verläuft von links unten nach rechts unten.

D -> 2: Aufgrund des ungeraden Exponenten ist der Graph punktsymmetrisch und aufgrund des positiven Koeffizienten a = 0,5 verläuft der Graph von links unten nach rechts oben.

7) a) $f(x) = ax^4$ mit $P(3/1) \in G_f \Rightarrow a \cdot 3^4 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{81}$

b) $f(x) = 3^{-4} \cdot x^n$ mit $Q(3/3) \in G_f \Rightarrow 3^{-4} \cdot 3^n = 3 \Rightarrow 3^{-4+n} = 3^1 \Rightarrow -4 + n = 1 \Rightarrow n = 5$

c) Ein solcher Graph existiert nicht. Wenn G_f punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs ist, ist n ungerade und G_f verläuft von links unten nach rechts oben oder von links oben nach rechts unten. Ein solcher Graph hat keinen kleinsten Funktionswert.

8) a) $x^7 = 5 \Rightarrow x = \sqrt[7]{5}$ b) $x^6 = 13 \Rightarrow x_1 = \sqrt[6]{13}$; $x_2 = -\sqrt[6]{13}$ c) $x^4 = -3$ keine Lösung

d) $x^5 = -32 \Rightarrow x = -\sqrt[5]{32} = -2$

f) $(48-5x)^{\frac{1}{3}} = 2 \Rightarrow \left((48-5x)^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^3 \Rightarrow (48-5x)^{\frac{1}{3}\cdot 3} = 8 \Rightarrow 48 - 5x = 8 \Rightarrow -5x = -40 \Rightarrow x = 8$

9) a) $4x^3 - x = 2x^3 \Rightarrow 2x^3 - x = 0 \Rightarrow x \cdot (2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$ 1. Faktor; $x_1 = 0$ und $g(0) = 0 \Rightarrow$ <u>$S_1(0/0)$</u>;

2. Faktor: $2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{0,5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $x_3 = -\sqrt{0,5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ mit $g(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $g(x_3) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

=> $\underline{S_2}(\frac{\sqrt{2}}{2}/\frac{\sqrt{2}}{2})$ und $\underline{S_3}-\frac{\sqrt{2}}{2}/-\frac{\sqrt{2}}{2})$

b) $x^3 = -0{,}125 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{0{,}125} = -0{,}5$ und $g(-0{,}5) = -0{,}125$ => $\underline{S(-0{,}5/-0{,}125)}$

c) $3x^2 + 2x - 0{,}5 = 3x + 2{,}5x^2 + 1 \Rightarrow 0{,}5x^2 - x - 1{,}5 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (-1{,}5)}}{2 \cdot 0{,}5} = 1 \pm 2$

=> $x_1 = 3$ mit $f(3) = 32{,}5$ => $\underline{S_1(3/32{,}5)}$ und $x_2 = -1$ mit $f(-1) = 0{,}5$ => $\underline{S_2(-1/0{,}5)}$

10) a) $x^2 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 5$; $L = \{0; 5\}$

b) $x^2 = 5x + 14 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+56}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2}$; $L = \{-2; 7\}$

c) $18x^2 - 2 = 0 \mid : 2 \Leftrightarrow 9x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 9x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9}$; $L = \{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\}$

d) $-2t^2 + t - 1 = 0$; Diskriminante $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1) = -7 < 0 \Rightarrow L = \{\}$

e) $2y^2 = y + 1 \Leftrightarrow 2y^2 - y - 1 = 0$; $D = 9$; $L = \{-\frac{1}{2}; 1\}$

f) $u^2 + 1 = 4u \Leftrightarrow u^2 - 4u + 1 = 0$; $D = 12$; $L = \{2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\}$

g) $2x^3 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$; $L = \{0; 2\}$

h) $x^3 = 4x \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x+2)(x-2) = 0$; $L = \{-2; 0; 2\}$

i) $x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *($x^2 + 4$ wird in IR nie 0)*; $L = \{0\}$

j) $(9x^2 + 1)(x + 9) = 0 \Leftrightarrow x + 9 = 0$ *($9x^2 + 1$ wird in IR nie 0);* $L = \{-9\}$

k) $(x^2 + 9x)(2x - 9) = 0 \Leftrightarrow x(x + 9)(2x - 9) = 0 \rightarrow L = \{-9; 0; 4{,}5\}$

l) $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow L = \{3\}$

m) $x^2 - 6x + 9 < 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 < 0$ Widerspruch $\rightarrow L = \{\}$;

n) $\frac{1}{2x} = \frac{x}{4{,}5} \mid \cdot 9x \Leftrightarrow \frac{9}{2} = 2x^2 \Leftrightarrow \frac{9}{4} = x^2$; $L = \{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\}$ bzw. schöner $L = \{-1{,}5; 1{,}5\}$

o) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x} = 1 \mid \cdot x(x+1)$; $x - 2(x+1) = x(x+1) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0$; $D = 4 - 4 \cdot 2 = -4 < 0 \Rightarrow L = \{\}$

p) $\frac{2+3x}{x-5} = 0 \Leftrightarrow 2 + 3x = 0$ *(Bruch wird 0, wenn der Zähler 0 wird);* $L = \{-\frac{2}{3}\}$

q) $\frac{x^2+4}{4-x} = 0$ *Zähler in IR immer positiv → Bruch =0 unmöglich* $\Rightarrow L = \{\}$ r) $L = \{\}$, da Zähler $= 3 \neq 0$

s) $\sqrt{x+7} - x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+7} = x + 1 \mid (..)^2 \Rightarrow x + 7 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 = 2$; $x_2 = -3$; Probe liefert Widerspruch für $x_2 = -3$; also $L = \{2\}$

t) $\sqrt[4]{z^3} = 10^6 \Leftrightarrow z^{\frac{3}{4}} = 10^6 \mid (\ldots)^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow x = (10^6)^{\frac{4}{3}} = 10^8$; $L = \{10^8\}$

u) $\sqrt[3]{2x+1} - 2 = 0 \Leftrightarrow (2x+1)^{\frac{1}{3}} = 2 \mid (\ldots)^3 \Leftrightarrow 2x + 1 = 8 \Leftrightarrow x = 3{,}5$; Probe o.k. $\rightarrow L = \{3{,}5\}$

v) $(x-1)(x+3) = 0$; Lösungen direkt ablesbar **(nicht ausmultiplizieren!):** $L = \{-3; 1\}$

w) $(x-1)(x+3) = -4$; ausmultiplizieren $\rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \rightarrow L = \{-1\}$

x) $(x-1)^2 = -4$ Widerspruch *(Quadrat in IR nie negativ)* ! $\rightarrow L = \{\}$

y) $(x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow |x-1| = 2$ oder $x_{1/2} - 1 = \pm 2$; $x_1 = 3$; $x_2 = -1$; $L = \{-1; 3\}$

z) $(x+1{,}8)^3 + 0{,}027 = 0 \Leftrightarrow (x+1{,}8)^3 = -0{,}027 \Leftrightarrow x + 1{,}8 = -\sqrt[3]{0{,}027} = -0{,}3$; $L = \{-2{,}1\}$

11) a) Ansatz: allgemeine Form $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(-1) = 7 \Rightarrow a - b + c = 7$ (I) $\Rightarrow a = 7 + b - c$ (I')

$f(1) = -1 \Rightarrow a + b + c = -1$ (II)

$f(4) = 2 \Rightarrow 16a + 4b + c = 2$ (III)

(I') in (II): $7 + b - c + b + c = -1 \Rightarrow 7 + 2b = -1$ (II') $\Rightarrow 2b = -8 \Rightarrow \underline{b = -4}$

(I') in (III): $16(7 + b - c) + 4b + c = 2 \Rightarrow 112 + 16b - 16c + 4b + c = 2 \Rightarrow 110 + 20b - 15c = 0$ (III')

$b = -4$ in (III'): $110 + 20 \cdot (-4) - 15c = 0 \Rightarrow 30 - 15c = 0 \Rightarrow \underline{c = 2}$

$b = -4$ und $c = 2$ in (I'): $a = 7 - 4 - 2 = \underline{1}$ => $\underline{f(x) = x^2 - 4x + 2}$

b) Ansatz: Nullstellenform: $f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$, da $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$ Nullstellen sind.

$\Rightarrow f(x) = a \cdot (x - (-2))(x - 3) = a \cdot (x + 2)(x - 3)$

$C(1/-3) \in G_f \Rightarrow f(1) = -3 \Rightarrow a \cdot (1 + 2)(1 - 3) = -3 \Rightarrow -6a = -3 \Rightarrow a = 0{,}5 \Rightarrow \underline{f(x) = 0{,}5 \cdot (x + 2)(x - 3)}$

12) (I) $2a - 3b + c = -10$

(II) $3a + 4b - 2c = 9$

(III) $a + b + c = -1$ => $a = -1 - b - c$ (III')

(III') in (I): $2\cdot(-1 - b - c) - 3b + c = -10$ => $-2 - 2b - 2c - 3b + c = -10$ => $-5b - c = -8$ (I')

(III') in (II): $3\cdot(-1 - b - c) + 4b - 2c = 9$ => $-3 - 3b - 3c + 4b - 2c = 9$ => $b - 5c = 12$ (II') => $b = 12 + 5c$

$b = 12 + 5c$ in (I'): $-5\cdot(12 + 5c) - c = -8$ => $-60 - 25c - c = -8$ => $-26c = 52$ => $\underline{\underline{c = -2}}$

$c = -2$ in (II''): $b = 12 + 5\cdot(-2) = \underline{\underline{2}}$

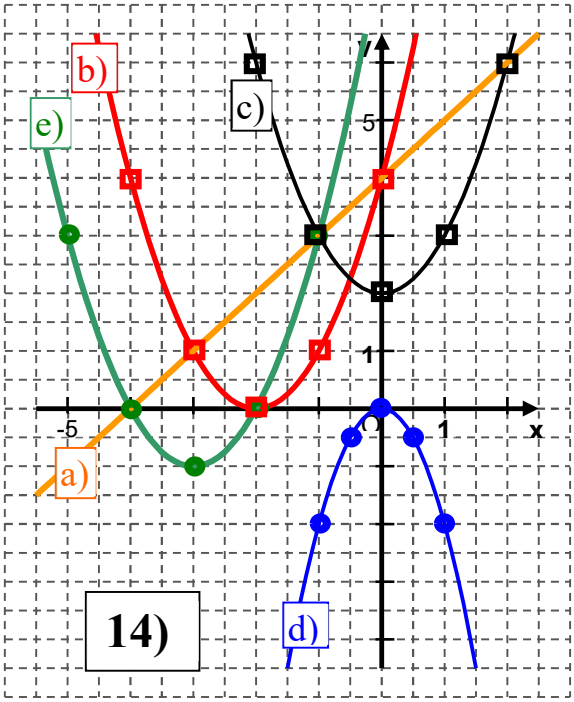
$b = 2$ und $c = -2$ in (III'): $a = -1 - 2 - (-2) = \underline{\underline{-1}}$ Die Lösung ist $a = -1$; $b = 2$; $c = -2$

13) a) $y = (x-3)(x+1)$;

b) $y = a(x-2)^2 + 3$; $R(1|7) \in \boldsymbol{P}$ $\Rightarrow$ $a(1-2)^2 + 3 = 7$ $\Rightarrow$ $a = 4$ $\rightarrow$ $y = 4(x-2)^2 + 3$

c) kongruent zur Normparabel und nach unten geöffnet => $a = -1$

$x_1 = 0$ und $x_2 = 6$ sind Nullstellen => Nullstellenform: $y = -x \cdot (x - 6) = 6x - x^2$



14) a) lineare Funktion mit $m = 1$ und $t = 2^2 = 4$

b) $S(-2|0)$; verschobene Normalparabel $\rightarrow$ z.B.:
von S um 1 nach rechts bzw. links $\rightarrow$ um 1 nach oben;
und um 2 nach rechts bzw. links $\rightarrow$ um 4 nach oben

c) $S(0|2)$ sonst wie b)

d) $S(0|0)$; $d(0,5) = -0,5$; $d(1) = -2$; *Symmetrie!*

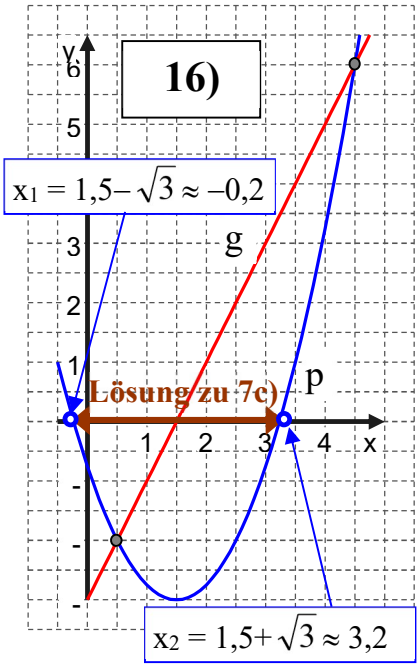
e) Nst.: $x_1 = -2$; $x_2 = -4 \rightarrow x_s = -3$ *(Mitte der Nst.)*; $y_s = e(-3) = -1$

15) a) $y = -x^2 + 3$; b) $y = (x + 3)^2 - 4$;

c) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$; d) $y = (x + 4)^2$;

e) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{5} = 0,4$; $t = 2$; $\rightarrow y = 0,4\,x + 2$

f) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{3}$; $\rightarrow$ $y = -\frac{1}{3}x$;



16) a) Schnittpunkte $\rightarrow$ Gleichsetzen : $x^2 - 3x - 0,75 = 2x - 3$;

$x^2 - 5x + 2,25 = 0$ => $x_1 = 4,5$; $x_2 = 0,5$ *(Lösungsformel)*;

zugehörige y-Koordinaten bestimmen durch Einsetzen in $y = 2x - 3$

$\rightarrow$ Schnittpunkte: $S_1\,(4,5 \mid 6)$; $S_2\,(0,5 \mid -2)$

b) Scheitelbestimmung durch quadratische Ergänzung:

$x^2 - 3x - 0,75 = x^2 - 3x + (1,5)^2 - (1,5)^2 - 0,75 = (x - 1,5)^2 - 3$

=> $S\,(1,5|-3)$ oder:

Nst.: $x_{1/2} = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1,5 \pm \sqrt{3}$ *(Lösungsformel)*

$\Rightarrow x_s = 1,5$ („Mitte"); $y_s = 1,5^2 - 3\cdot 1,5 - 0,75 = -3$;

c) Zeichnung $\rightarrow$ für alle x zwischen den beiden Nullstellen sind die Funktionswerte der Parabel negativ $\rightarrow$ $L = \,]\,1,5 - \sqrt{3}\,;\,1,5 + \sqrt{3}\,[$

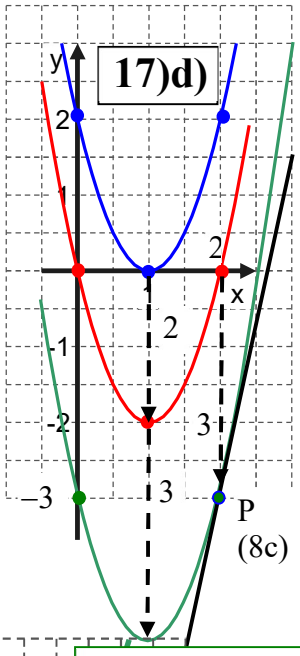
17) a) Die Parabel hat mit der x-Achse (Gleichung $y = 0$) nur einen Punkt gemeinsam, wenn die Gleichung $2x^2 - 4x - t = 0$ genau eine Lösung hat, wenn also die Diskriminante $D = 0$ ist.

$D = (-4)^2 + 4\cdot 2t = 16 + 8t = 0$ => für $\mathbf{t = -2}$ hat die Parabel mit der x-Achse nur einen Punkt gemeinsam, dann gilt (wegen $D = 0$): $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{+4}{2\cdot 2} = 1$. Hat eine Parabel nur einen einzigen Schnittpunkt mit der x-Achse, so ist dieser auch gleichzeitig der Scheitelpunkt $S(1 \mid 0)$.

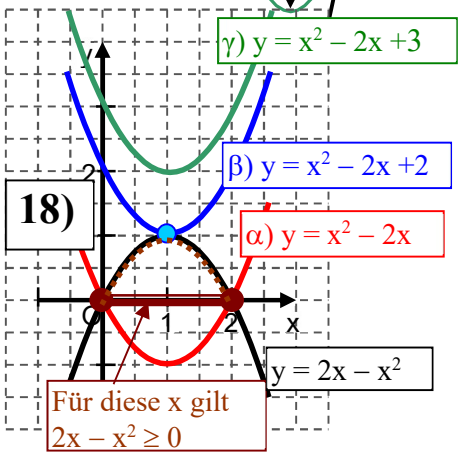
Schnittpunkt mit der y-Achse $\rightarrow$ $x = 0$ (und $t = -2$) $\Rightarrow$ $p(0) = -t = +2$; => $S_y\,(0 \mid 2)$

b) p: $y = 2x^2 - 4x - t$ soll durch den Ursprung (0 ; 0) gehen => p (0) = 0
=> $-t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ → p: $\mathbf{y = 2x^2 - 4x;}$
2. Schnittpunkt mit der x-Achse:
$y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x-2) = 0 \Rightarrow x_2 = 2$; $S_x(2 \mid 0)$;
Scheitel: Mitte der Nst.: $x_s = 0{,}5\,(0+2) = 1 \rightarrow y_s = 2\cdot 1^2 - 4\cdot 1 = -2$ oder
$2x^2 - 4x = 2\cdot(x^2 - 2x + 1 - 1) = 2(x^2 - 2x + 1) - 2 = 2(x-1)^2 - 2$; $\rightarrow S(1 \mid -2)$;
oder: die Parabel aus b) entsteht aus der Parabel von a) durch Verschiebung um 2 nach unten → Verschiebung des Scheitels: $S_a(1|0) \rightarrow S_b(1|-2)$

c) ein gemeinsamer Punkt für p und g ⇔ eine Lsg. für $2x^2 - 4x - t = 4x - 11$
⇔ eine Lsg. für $2x^2 - 8x + 11 - t = 0$ ⇔ Diskriminante $D = 64 - 4\cdot 2\cdot(11 - t) = 0$
⇔ $t = 3$ → p: $\mathbf{y = 2x^2 - 4x - 3;}$ *(noch mal um 3 nach unten)*
Berührpunkt P : $x = \frac{-(-8)\pm\sqrt{0}}{2\cdot 2} = 2$; $y = 4\cdot 2 - 11 = -3$; $B(2|-3)$



18) a) **L = [0;2]**
b) α) z.B.: Alle Vorzeichen ändern → $y = x^2 - 2x$ →
→ Spiegelung an der x-Achse → die beiden Nullstellen bleiben
β) z.B.: α um 2 nach oben schieben → $y = x^2 - 2x + 2$
nur noch gemeinsamer Scheitelpunkt (1|1)
γ) z.B.: α um 3 nach oben schieben → $y = x^2 - 2x + 3$

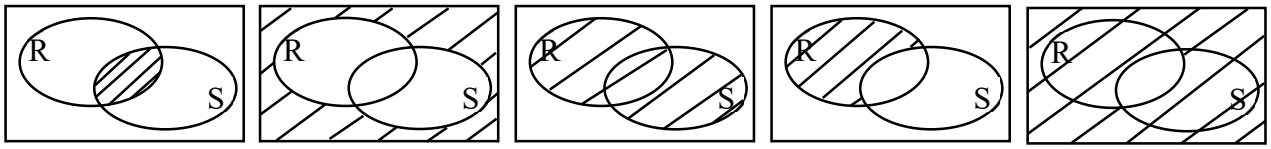


19) $E = \frac{1}{2}\, m v^2 \mid \cdot\frac{2}{m}$; $\frac{2E}{m} = v^2$; $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ für $v \geq 0$;
a) v wird verfünffacht → E wird fünfundzwanzig mal so groß,
denn $E \sim v^2$ (kurz : $v' = 5v \Rightarrow E' = 25\,E$)
b) v wird halbiert → E wird geviertelt (kurz : $v' = 0{,}5v$
$\Rightarrow E' = 0{,}25\,E$)

20) 1. $A = 0{,}5 \cdot x \cdot y$ 2. $y = -0{,}5x + 8$
3. $A(x) = 0{,}5\cdot x\cdot(-0{,}5x + 8) = -0{,}25x^2 + 4x$ => $A(x) = 0$ für $x_1 = 0$ und $x_2 = 16$
=> Mitte der Nullstellen: $x_S = 8$ mit $y_S = A(x_S) = -0{,}25\cdot 8^2 + 4\cdot 8 = 16$ => Scheitel: S(8/16)
4. Für x = 8 hat das Dreieck den größtmöglichen Flächeninhalt A = 16. Der Punkt P besitzt die Koordinaten P(8/4).

21) 1. $P = x \cdot y$ 2. $x - y = 4$ => $y = x - 4$
3. $P(x) = x\cdot(x - 4) = x^2 - 4x$ => $P(x) = 0$ für $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$
=> Mitte der Nullstellen: $x_S = 2$ mit $y_S = P(x_S) = 2\cdot(-2) = -4$ => Scheitel: S(2/-4)
4. Die beiden Zahlen lauten x = 2 und y = 2 – 4 = -2 und haben den kleinsten Produktwert -4.

22) a) $R \cap S$ b) $\overline{R} \cap \overline{S} = \overline{R \cup S}$ c) $R \cup S$ d) $R \cap \overline{S}$ e) $\overline{R} \cup \overline{S} = \overline{R \cap S}$



23) a)

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	P(A)
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

b) Nach dem Additionssatz gilt:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
=> Im umrandeten Feld steht die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$. Diese muss 0 sein.

24) a) WG: Windkraftgegner

	WG	$\overline{WG}$	
Oberberg	*258 – 27 = 231*	**27**	**258**
Niederberg	1722 – 1062 = 660	1089 – 27 = 1062	**1722**
	1980 – 1089 = 891	**1089**	258 +1722 = 1980

b) Oberberg: $\frac{231}{258} \approx 89{,}5\%$, Niederberg: $\frac{660}{1722} \approx 38{,}3\%$

c) $|O \cap WG| = 231$ => $p_1 = \frac{231}{1980} \approx 11{,}7\%$;

$|N \cup \overline{WG}| = 660 + 1062 + 27 = 1749$ => $p_2 = \frac{1749}{1980} \approx 88{,}3\%$

25) $A(D) = 0{,}5 \cdot g_1 \cdot h_1 = 0{,}5 \cdot 5cm \cdot 4cm = 10\ cm^2$

Wenn k der (gesuchte) Abbildungsmaßstab für die Strecken ist, dann gilt für die Flächeninhalte :

$k^2 = A(D_2) : A(D_1) = 90cm^2 : 10cm^2 = 9$ => $k = 3$ ($k>0$)

=> $g_2 = k \cdot g_1 = 3 \cdot 5cm = 15cm$ und $h_2 = k \cdot h_1 = 3 \cdot 4cm = 12cm$

26) $\frac{y}{5cm} = \frac{3cm}{7cm-3cm}$ (X-Figur) => $y = \frac{3cm}{4cm} \cdot 5cm = 3{,}75cm$

$\frac{x}{4cm} = \frac{5cm+4}{5cm}$ (V-Figur) => $x = \frac{9cm}{5cm} \cdot 4cm = 7{,}2cm$

27) $\frac{x}{|\overline{BC}|} = \frac{x+|\overline{BD}|}{|\overline{DE}|}$

=> $\frac{x}{10} = \frac{x+12}{25}$ $| \cdot 10 \cdot 25$ => $25 \cdot x = (x + 12) \cdot 10$ => $25x = 10x + 120$ $|-10x$ => $15x = 120$ => $x = 8$ (m)

28) Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck BMP: $|\overline{BP}|^2 = |\overline{MP}|^2 - |\overline{MB}|^2 = (20cm)^2 - (5cm)^2 = 375\ cm^2$

=> $|\overline{BP}| = 5\sqrt{15}cm$ => $\frac{|\overline{BP}|}{|\overline{MP}|} = \frac{5\sqrt{15}}{20} = \frac{\sqrt{15}}{4} \approx 96{,}8\ \%$. => $|\overline{BP}|$ ist um ca. 3,2 % kleiner als $|\overline{MP}|$.

29) $r = |\overline{MP}| = \sqrt{(-10-(-18))^2 + (7-(-3))^2} = \sqrt{8^2 + 10^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$

30) Die Diagonale d des Schrankes muss kleiner als 2,50 m sein. Für die Schrankhöhe h gilt mit Pythagoras: $h < \sqrt{d^2 - t^2} = \sqrt{(2{,}5m)^2 - (0{,}6m)^2} = \sqrt{5{,}89}m = 2{,}4269322\ldots\ m$

Der Schrank darf höchstens 2,42 m hoch sein.

31) Die Raumdiagonale d des Quaders muss **mindestens so groß** sein wie die Länge l der Nadel *(praktisch: wegen der Dicke der Nadel **größer** als deren Länge)*

Grenzfall: $d = \sqrt{l^2 + (51mm)^2 + (32mm)^2} = 85\ mm$ $\Rightarrow$ $l = 60\ mm$

=> Die Schachtel muss länger sein als 60 mm.

32) $a = 8\ cm$; $A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3} \cdot 64}{4}cm^2 = 16\sqrt{3}\ cm^2$

33) Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck ABC liefert: $\overline{AB} = \sqrt{(3km)^2 + (6km)^2} = 3\sqrt{5}km$;

$v = \frac{s}{t} \Rightarrow t_{\overline{AB}} = \frac{|\overline{AB}|}{v_{AB}} = \frac{3\sqrt{5}km}{30\frac{km}{h}} = \frac{\sqrt{5}}{10}h \approx 0{,}22h$; $t_{Hauptstraße} = \frac{3km+6km}{50\frac{km}{h}} = \frac{9}{50}h = 0{,}18h$;

=> keine Zeitersparnis

Gesucht: v für $|\overline{AB}| = 3\sqrt{5}km$, so dass $t < 0{,}18h$; $v = \frac{s}{t} = \frac{3\sqrt{5}km}{0{,}18h} = 37{,}26\ldots\frac{km}{h}$ => lohnt ab $v = 38\frac{km}{h}$.

34) a) $\tan\alpha = 0{,}15$ $\Rightarrow$ $\alpha = 8{,}53\ldots° \approx 8{,}5°$

b) g: $y = mx + t$ mit Steigung $m = \tan 60° = \sqrt{3}$ und y-Abschnitt $t = -3$ => g: $y = \sqrt{3}x - 3$

c) $2x - 3y + 4 = 0$ $\Leftrightarrow$ $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ $\rightarrow$ Steigung $m = \frac{2}{3}$; $\tan\alpha = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ Steigungswinkel $\alpha \approx 34°$

$S_y(0 \mid \frac{4}{3})$; $y = 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow S_x(-2 \mid 0)$

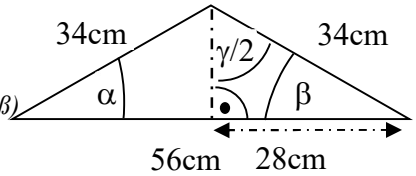
35) $\cos\delta = \frac{3m}{4m} = 0{,}75$ $\Rightarrow$ $\delta = 41{,}4\ldots° \approx 41°$; $\sin 20° = \frac{y}{3m}$ $\Rightarrow$ $y = 3m \cdot \sin 20° = 1{,}02\ldots m \approx 1{,}0m$

36) Hier gleichschenkliges Dreieck

$\Rightarrow$ Winkelhalbierende w_γ = Seitenhalbierende = Höhe

$\Rightarrow \cos\beta = \frac{28\text{cm}}{34\text{cm}} = \frac{14}{17} \Rightarrow \alpha = \beta = 34{,}560\ldots° \approx 34{,}56°$ *(Basiswinkel gleich groß)*

$\Rightarrow \gamma = 180° - 2\beta = 110{,}879\ \ldots° \approx 110{,}88°$

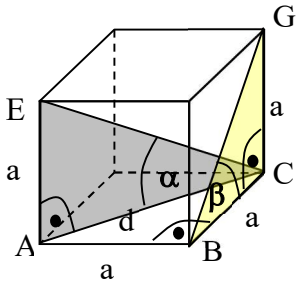


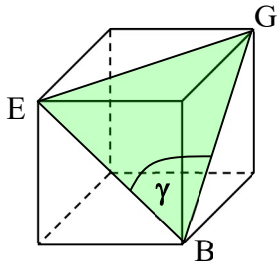
37) a) rechtwinkliges Stützdreieck ACE:

$\tan\alpha = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 35{,}26\ \ldots° \approx 35°$

b) Stützdreieck BCG ist gleichschenklig $\Rightarrow \beta = 45°$

c) Δ EBG ist gleichseitig $\Rightarrow \gamma = 60°$





38) a) $\frac{\sqrt{1-\cos^2(90°-\alpha)}}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} = 1$ b) $\frac{1}{\tan\alpha}\cdot\cos(90°-\alpha) = \frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\cdot\sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha = \cos\alpha$

c) $\sin^2\alpha\cdot\frac{1}{\tan^2\alpha} + \sin^2\alpha = \sin^2\alpha\cdot\frac{1}{\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}} + \sin^2\alpha = \sin^2\alpha\cdot\frac{cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

39) a) bekannt bzw. Taschenrechnerwert: $\alpha_1 = 30°$ => $\alpha_2 = 180° - \alpha_1 = 150°$

b) Taschenrechnerwert: $\alpha_1 \approx 113{,}6°$ => $\alpha_2 = 360° - \alpha_1 = 246{,}4°$

c) Taschenrechnerwert: $-\alpha_0 \approx -14{,}5$ => $\alpha_1 = 180° + \alpha_0 \approx 194{,}5°$ und $\alpha_2 = 360° - \alpha_0 \approx 345{,}5°$

40) Der Sinussatz besagt, dass der Quotient zweier Dreiecksseiten genauso groß ist, wie der Quotient der Sinuswerte ihrer Gegenwinkel. Sind nun jedoch zwei Seiten und ihr Zwischenwinkel gegeben, so kann man den Sinussatz nicht anwenden.

41) Kosinussatz: $|\overline{AB}|^2 = (500\text{m})^2 + (300\text{m})^2 - 2\cdot 500\text{m}\cdot 300\text{m}\cdot\cos 62° \approx 199159\text{m}^2$

=> $|\overline{AB}| \approx 446\text{m}$