Übungsaufgaben mit Lösungen findest du unter **www.mathegym.de** !

Reelle Zahlen IR

- Einordnung

IN (natürliche Zahlen) $\subseteq$ **ℤ** (ganze Zahlen) $\subseteq$ **ℚ** (rationale Zahlen) $\subseteq$ **IR** (reelle Zahlen)
IR\ℚ: irrationale Zahlen
z.B.: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, aber $\sqrt{2} \in \mathrm{IR}$; $1{,}4 \notin \mathbb{Z}$, aber $1{,}4 \in \mathbb{Q}$; $-3 \notin \mathrm{IN}$, aber $-3 \in \mathbb{Z}$

- **Quadratwurzeln**

$\sqrt{\boldsymbol{a}}$ ist diejenige <u>nicht negative</u> Zahl, deren Quadrat a ergibt, also $\left(\sqrt{\boldsymbol{a}}\right)^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{a}$. (gilt nur für **a ≥ 0**)
umgekehrt: $\sqrt{a^2} = |a|$ (gilt auch für a < 0)
Bsp.: $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{(-6)^2} = 6$, $\sqrt{(2x-3)^2} = |2x-3| = \begin{cases} 2x-3, falls\ x \geq 1{,}5 \\ -(2x-3), falls\ x < 1{,}5 \end{cases}$

- **Definitionsmenge von Wurzeltermen**

Prinzip:
Der **Radikand** (=Term unter der Wurzel) darf nicht negativ sein.
Bsp.: $\sqrt{x}$ ist definiert für x ≥ 0;
$\sqrt{2x-4}$ ist definiert für x ≥ 2, denn 2x–4 ≥0 ⇔ x ≥2;
$\frac{1}{\sqrt{4-2x}}$ ist definiert für x < 2 *(zusätzlich: Nenner ≠ 0)*

- **Rechenregeln für Quadratwurzeln**

$\boxed{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}}$ $\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}}$ jedoch: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Bsp.: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 6} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$;

Achtung: $\sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4$ **!**

- **Teilweise Radizieren**

Beispiel: $\sqrt{32a^2b^8c^3} = \sqrt{16 \cdot 2 \cdot a^2(b^4)^2 \cdot c^2 \cdot c} = 4|a|b^4c\sqrt{2c}$

- **Rationalmachen des Nenners**

Beispiele: $\frac{21}{2\sqrt{3}} = \frac{21\sqrt{3}}{2(\sqrt{3})^2} = \frac{21\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

- *„Hilfsmittel“* **Binomische Formeln**

$\mathbf{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ Bsp. : $(2x + 7y)^2 = 4x^2 + 28xy + 49y^2$
$\mathbf{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ $4x^2 - 49 = (2x-7)(2x+7)$
$\mathbf{(a-b)(a+b) = a^2 - b^2}$ $5x^2 - 10x + 5 = 5(x^2 - 2x + 1) = 5(x-1)^2$
Anwendungen: $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = \sqrt{(2x-3)^2} = |2x-3|$
$\frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{(\sqrt{1}-\sqrt{3})(\sqrt{1}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{(\sqrt{1})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{1-3} = \frac{1+\sqrt{3}}{-2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Erweiterung des Potenzbegriffs

- **n-te Wurzel** und **Potenzen mit rationalen Exponenten**

allgemein: $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}^{\frac{1}{n}}$ ist die **nicht negative** Lösung der Gleichung $\mathbf{x^n = a}$
(speziell: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$).
weiter gilt: $\boldsymbol{a}^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}^m}$ und $\boldsymbol{a}^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^m}}$
Bsp.: $\sqrt[3]{8} = 2$ (denn $2^3 = 8$); $25^{\frac{3}{2}} = (25^{\frac{1}{2}})^3 = (\sqrt{25})^3 = 5^3 = 125$
$0{,}0001^{\frac{3}{4}} = (0{,}0001^{\frac{1}{4}})^3 = 0{,}1^3 = 0{,}001$; $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$; $2{,}4 \cdot 10^{-3} = 0{,}0024$

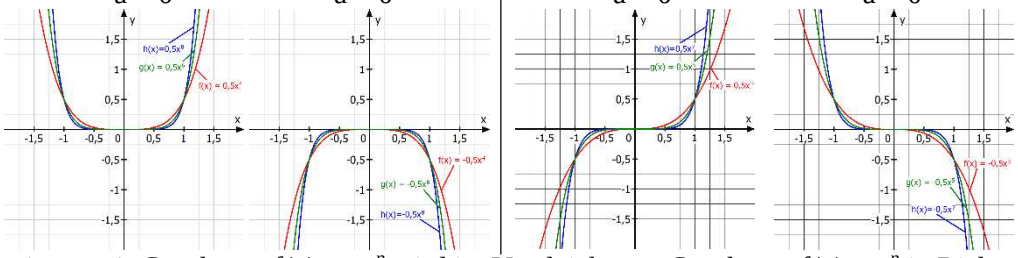
- **Rechenregeln** für Potenzen

$\boxed{\mathbf{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}}$ $\boxed{\mathbf{a^n : a^m = a^{n-m}}}$ $\boxed{\mathbf{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}}$
für Termvereinfachungen: **Potenzschreibweise verwenden!**
z.B.: $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = x^{\frac{3}{6}+\frac{4}{6}} = x^{\frac{7}{6}} (= \sqrt[6]{x^7})$
$\sqrt{x : \sqrt[5]{x}} = (x^1 : x^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{2}} = (x^{1-\frac{1}{5}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{5}} (= \sqrt[5]{x^2})$

- **Potenz-funktion**

$f(x) = a \cdot x^n$ ($n \in IN$, $a \neq 0$); n gibt den Grad der Potenzfunktion an.

n gerade: a > 0, a < 0 | n ungerade: a > 0, a < 0



-1 < a < 1: Graph von $f(x) = ax^n$ wird im Vergleich zum Graph von $f(x) = x^n$ in Richtung der y-Achse gestaucht.
a < -1 oder a > 1: Graph von $f(x) = ax^n$ wird im Vergleich zum Graph von $f(x) = x^n$ in Richtung der y-Achse gestreckt.

- **Potenz-gleichung**

Wird eine Potenzfunktion mit einer waagrechten Gerade geschnitten, so entsteht eine Gleichung: **$x^n = c$ ($n \in IN$, $c \neq 0$)**

	n gerade, c > 0	n gerade, c < 0	n ungerade, c > 0	n ungerade, c < 0
Anzahl	2 Lösungen	keine Lösung	eine Lösung	eine Lösung
Lösung	$\mathbf{x_{1/2} = \pm\sqrt[n]{c}}$	--	$\mathbf{x = \sqrt[n]{c}}$	$\mathbf{x = -\sqrt[n]{|c|}}$

$x^3 + 15 = -110 \Leftrightarrow x^3 = -125 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{|-125|} \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{125} \Leftrightarrow x = -5$

$2x^6 = \frac{1}{32} \Leftrightarrow x^6 = \frac{1}{64} \Leftrightarrow x_1 = \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{\sqrt[6]{1}}{\sqrt[6]{64}} = \frac{1}{2};\ x_2 = -\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = -\frac{1}{2}$

quadratische Gleichung

- **Lösungs-formel**

Lösen von **quadratischen Gleichungen**
$ax^2 + bx + c = 0$

mit der **Lösungsformel:** $\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$
(„Mitternachtsformel“)

$-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} = 0$; G = IR

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{5}{2})}}{2 \cdot (-\frac{1}{2})}$; $x_1 = 1$; $x_2 = 5$;
L= {1;5}

Zerlegung in **Linearfaktoren;** *Anwendung: Nullstellenform quadratischer Funktionen, s.u.*

$-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}(x-1)(x-5)$
allgemein:
$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Die **Diskriminante $D = b^2 - 4ac$** entscheidet über die Anzahl der Lösungen:
D > 0 ⇔ zwei Lösungen
D = 0 ⇔ genau eine Lösung
D < 0 ⇔ keine Lösung

$x^2 + 3x + 5 = 0$; G = IR;
$D = 3^2 - 20 < 0 \Rightarrow$ L = { }

- **Spezialfälle**

Die Formel ist in Spezialfällen nicht nötig:

1) c = 0 → x ausklammern:
$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{b}{a}$

$2x^2 + 5x = 0$; G = IR
$x \cdot (2x + 5) = 0$;
$x_1 = 0$; $x_2 = -2{,}5$; L = { – 2,5 ; 0 }

2) b = 0 → Auflösen nach x^2
→ Wurzel ziehen

$ax^2 + c = 0 \rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$;

$x_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ mit $-\frac{c}{a} \geq 0$

$4x^2 - 5 = 0$; G = IR ;
$L = \{-\frac{\sqrt{5}}{2};\ \frac{\sqrt{5}}{2}\}$

$x^2 + 4 = 0$; G = IR ;
$x^2 = -4$; Widerspruch ⇒ L = { }

3) Binomische Formeln sollten erkannt werden

$x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 0$;
$\Rightarrow$ L = {–3}

Lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten

Vorgehen:
1. Auflösen einer Gleichung nach einer Variablen.
2. Einsetzen des ermittelten Terms für diese Variable in die beiden anderen Gleichungen anstelle der Variablen.
3. Lösen des entstandenen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten (siehe 8.Klasse).
4. Einsetzen der Lösung in die erste Gleichung zur Bestimmung der dritten Variable.

Bestimmung der **Schnittpunkte von zwei Funktionsgraphen**:

Vorgehen:
1. Gleichsetzen der Funktionsterme.
2. Lösen der entstandenen Gleichung (z.B. mithilfe der Lösungsformel).
3. Lösung ist x-Koordinate des Schnittpunktes. Berechnung der y-Koordinaten durch Einsetzen der Lösung in eine der beiden Funktionen.

- **Anwendungen**

---

quadratische Funktion

- **Darstellungsformen**

Normalform: $y = a x^2 + bx + c$ **Scheitelform:** $y = a(x - x_s)^2 + y_s$
Nullstellenform: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

Beispiel: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$ (**Normalform**)

Quadratische Ergänzung → **Scheitelform**:

$$-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - 6x) - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) - \frac{5}{2} =$$

$= -\frac{1}{2}[(x-3)^2 - 9] - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2;$ also Scheitelpunkt: **S(3|2)**

Berechnung der Nullstellen mit Ansatz $f(x) = 0$ *(siehe oben: „quadratische Gleichungen“)* → **Nullstellenform**: $y = -\frac{1}{2} \cdot (x-1) \cdot (x-5)$

Falls Nullstellen existieren *(Diskriminante ≥ 0)*, kann man den Scheitelpunkt auch über die **Symmetrie** der Parabel bestimmen, hier: $x_s = \frac{1+5}{2} = 3$ *(Mittelwert von x_1 und x_2)*

auch ohne Nullstellen folgt aus der Symmetrie: $x_s = -\frac{b}{2a}$;

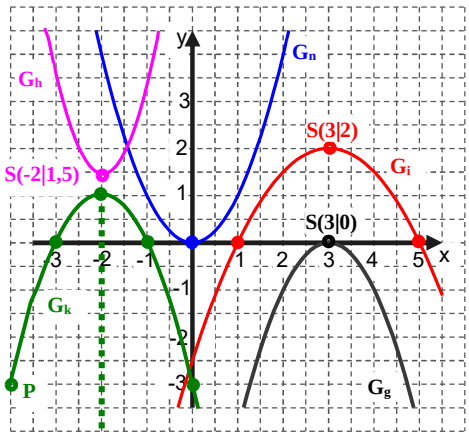
hier: $x_s = -\frac{3}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 3$

$y_s = f(x_s) = f(3) = 2$

- **Transformation der Normalparabel**

Normalparabel: $n(x) = x^2$ → $f(x) = a\cdot(x + d)^2 + e$

e: Verschiebung um |e| Einheiten nach **oben** für e > 0, bzw. nach **unten** für e < 0.
d: Verschiebung um |d| Einheiten nach **links** für d > 0, bzw. nach **rechts** für d < 0.
a: **enger** als Normalparabel für |a| > 1 bzw. **weiter** für |a| < 1
Spieglung an der x-Achse für a < 0



$g(x) = -(x-3)^2$
$h(x) = 2(x+2)^2 + 1{,}5$
$i(x) = -0{,}5\cdot(x-3)^2 + 2$
$k(x) = -(x+1)(x+3)$

Nullstellen: $x_1 = -1$; $x_2 = -3$;

Scheitel: $x_s = \frac{1}{2}(-1 + (-3)) = -2$;

$y_s = k(-2) = 1 \rightarrow S(-2 \mid 1)$

→ ebenso: $k(x) = -(x+2)^2 + 1$

$k(0) = -3 \rightarrow S_y(0 \mid -3)$

Auch der bezüglich $x = -2$ zu S_y symmetrische Punkt $P(-4 \mid -3)$ liegt auf der Parabel.

- **Anwendungen**

Aufstellung von Funktionstermen zu Parabeln z.B. mittels eines Gleichungssystems zum Modellieren und Lösen von Sachproblemen.

Extemwertprobleme: Lösen von Problemen (z.B. aus Alltag, Technik, Wirtschaft), bei denen gefragt ist, wann eine Größe möglichst klein oder groß ist.

Vorgehen: 1. Aufstellen eines Ansatzes für die Größe, die extremal werden soll.

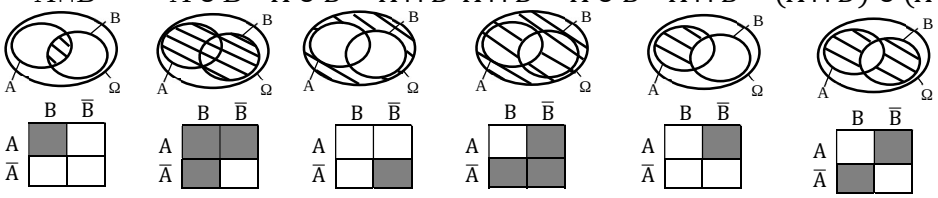
2. Zusammenhang zwischen den auftretenden Variablen aufstellen.
3. Bestimmung einer Funktion für die betrachtete Größe.
4. Ermitteln des Scheitelpunktes und Angabe des Extremwertes.

verknüpfte Ereignisse

Schreibweise: $A \cap B$: „Das Ereignis A **und** das Ereignis B“;
$A \cup B$: „Das Ereignis A **oder** das Ereignis B“; $\overline{A}$: „Das **Gegenereignis** zu A“;
H(A): „**absolute Häufigkeit** für das Eintreten des Ereignisses A“;
P(A): „**Wahrscheinlichkeit** für das Eintreten des Ereignisses A“

• **Mengendiagramme**

$A \cap B$ $\quad A \cup B$ $\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\quad A \cap \overline{B}$ $\quad (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$



• **Vierfeldertafel**

	A	$\overline{A}$	
B	H(A∩B) P(A∩B)	H($\overline{A}$ ∩ B) P($\overline{A}$ ∩ B)	H(B) P(B)
$\overline{B}$	H(A ∩ $\overline{B}$) P(A ∩ $\overline{B}$)	H($\overline{A}$ ∩ $\overline{B}$) P($\overline{A}$ ∩ $\overline{B}$)	H($\overline{B}$) P($\overline{B}$)
	H(A) P(A)	H($\overline{A}$) P($\overline{A}$)	H(Ω) P(Ω)

Beispiel :
Die Wirkung von Hausaufgaben auf die Zeugnisnote soll in einer Gruppe von 200 Schülern untersucht werden. Man betrachtet dazu die Ereignisse
H = "Ein Schüler macht regelmäßig seine Hausaufgaben in Mathematik" und
E = "Erfolg: Der Schüler bekommt in Mathe im Zeugnis mindestens eine 2“

Umfrageergebnis: 160 Schüler machten ihre Hausaufgabe ⇔ H(H) = 160
von diesen Schülern hatten 48 Erfolg ⇔ H(E ∩ H) = 48;
38 Schüler hatten keine regelmäßige Hausaufgabe **und** waren nicht erfolgreich ⇔
⇔ H($\overline{E}$ ∩ $\overline{H}$) = 38

Eintrag dieser **absoluten Häufigkeiten** (fett gedruckt) in die **Vierfeldertafel T1** und Ergänzung der Tafel ; z.B. H($\overline{E}$ ∩ H) = 160 – 48 = 112
→ Berechnung der "Laplace-Wahrscheinlichkeit" *(→gwk8!)* → **Vierfeldertafel T2**
In den inneren grauen Rechtecken stehen die absoluten Häufigkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten der "**und**"-Ereignisse; z.B.: $\overline{E} \cap \overline{H} = 38$; P(E ∩ H) = 0,24

Absolute Häufigkeiten:			
T1	H	$\overline{H}$	gesamt
E	**48**	2	50
$\overline{E}$	112	**38**	150
gesamt	**160**	40	**200**

: 200 →

Relative Häufigkeiten = Wahrscheinlichkeiten:			
T2	H	$\overline{H}$	
E	**0,24**	0,01	0,25
$\overline{E}$	0,56	**0,19**	0,75
	0,80	0,20	**1**

• **Additionssatz**

P(A∪B) = P(A) + P(B) – P(A∩B)
zum obigen Beispiel:
Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Schüler regelmäßig Hausaufgaben macht oder Erfolg in Mathe hat: P(H∪E) = 0,80 + 0,25 – 0,24 = 0,81

Ähnlichkeit

Die Figur F_2 bzw. der Körper K_2 ist **ähnlich** zur Figur F_1 bzw. zum Körper K_1, wenn sie durch **maßstäbliches Verkleinern** oder **Vergrößern** in kongruente Figuren bzw. Körper übergeführt werden können. Der Faktor, mit dem dabei alle Seiten multipliziert werden, heißt **Ähnlichkeitsfaktor**.

• **Eigenschaften**

Für ähnliche Figuren/Körper gilt:
- Entsprechende **Winkel** sind gleich **groß**.
- Entsprechende Seiten haben das **gleiche Seitenverhältnis**.
- Der Flächeninhalt von F_2 hat den **k^2-fachen Flächeninhalt** von F_1.
- Das Volumen von K_2 hat das **k^3-fache Volumen** von K_3.

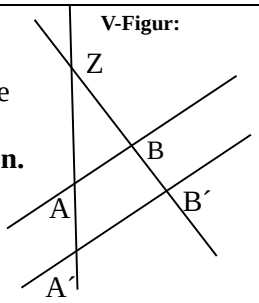
Zwei Dreieck sind **ähnlich**, wenn sie
- in zwei Winkeln übereinstimmen. (**W:W-Satz**)
- im Verhältnis entsprechender Seiten übereinstimmen. (**S:S:S-Satz**)

• **Ähnlichkeitssätze für Dreiecke**

1. Strahlensatz:
Werden die zwei Geraden einer Geradenkreuzung von zwei **parallelen** Geraden geschnitten, dann **verhalten sich** zwei beliebige **Abschnitte auf der einen Kreuzungsgeraden** genauso **wie die entsprechenden Abschnitte** auf der **anderen Kreuzungsgeraden.**

hier: $AB||A'B' \Rightarrow |\overline{ZA'}|:|\overline{ZA}| = |\overline{ZB'}|:|\overline{ZB}|$ und
$|\overline{AA'}|:|\overline{ZA}| = |\overline{BB'}|:|\overline{ZB}|$ usw.

V-Figur:



2. Strahlensatz:
Die ausgeschnittenen **Parallelstrecken verhalten sich** dann genauso **wie die Entfernungen entsprechender Streckenendpunkte zum Kreuzungspunkt.**

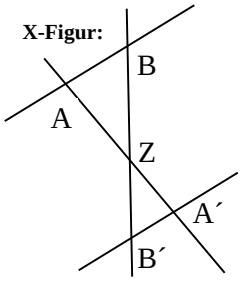
hier z.B.: $AB||A'B' \Rightarrow |\overline{A'B'}|:|\overline{AB}| = |\overline{ZB'}|:|\overline{ZB}|$

Bsp. für V-Figur: $|\overline{ZA'}| = 8\text{cm}$; $|\overline{ZA}| = 6\text{cm}$; $|\overline{BB'}| = 3\text{cm}$

=> $|\overline{AA'}| = 8\text{cm} - 6\text{cm} = 2\text{cm}$ => $\frac{|\overline{ZB}|}{3\text{cm}} = \frac{6\text{cm}}{2\text{cm}}$

=>$|\overline{ZB}| = \frac{6\text{cm}}{2\text{cm}} \cdot 3\text{cm} = 9\text{cm}$

X-Figur:

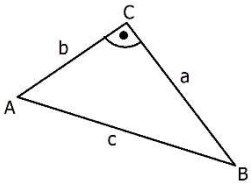


Bsp. für X-Figur: $|\overline{ZA'}| = 5\text{cm}$; $|\overline{AA'}| = 9\text{m}$; $|\overline{A'B'}| = 7\text{cm}$

=> $|\overline{ZA}| = 9\text{cm} - 5\text{cm} = 4\text{cm}$ => $\frac{|\overline{AB}|}{7\text{cm}} = \frac{4\text{cm}}{5\text{cm}}$ =>$|\overline{AB}| = \frac{4\text{cm}}{5\text{cm}} \cdot 7\text{cm} = 5{,}6\text{cm}$

Strahlensätze

Im **rechtwinkligen Dreieck** ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten: $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$

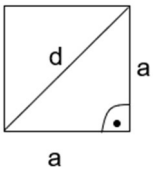


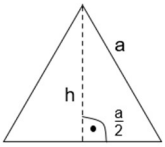
Bsp.: a = 4cm; c = 6cm => b = $\sqrt{(6cm)^2 - (4cm)^2} =$
$= 2\sqrt{5}cm$

Umkehrung des „Pythagoras“:
Gilt in einem Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist es rechtwinklig.
(Bsp.: a = 3 cm; b = 4 cm; c = 5cm)

Satz des Pythagoras

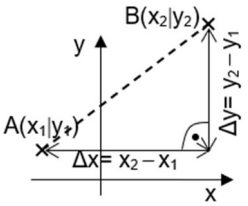
Anwendungen des „Pythagoras“ z.B. bei :





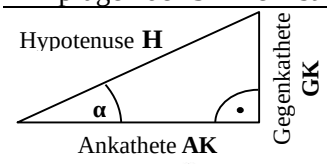
Diagonale im Quadrat: $d = a\sqrt{2}$
Höhe im gleichseitigen Dreieck:
$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

Entfernung zweier Punkte $A(x_1|\ y_1)$ und $B(x_2|\ y_2)$
$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
z.B.: A(–3|1); B(2|7)
=> $|\overline{AB}| = \sqrt{(-3-2)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{61}$

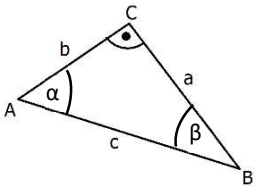


Einprägen der Skizzen ist besser als Auswendiglernen!

• **Anwendungen**



sin α = $\frac{GK}{H}$ **cos α = $\frac{AK}{H}$** **tan α = $\frac{GK}{AK}$**



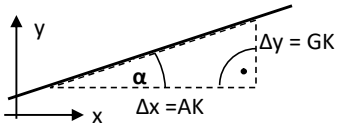
Beispiele:
➢ b = 3cm, β = 25°; gesucht: a, c, α
sin 25° = $\frac{3\text{cm}}{c}$ => c = $\frac{3\text{cm}}{\sin 25°} \approx 7\text{cm}$
α = 180° – 90° – 25° = 65°
$\tan 25° = \frac{3\text{cm}}{a}$ => a = $\frac{3\text{cm}}{\tan 25°} \approx 6{,}4cm$

Trigonometrie
• **Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck**

➢ **Steigung einer Geraden** (praktisch z.B.: Straße)

$m = \frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{waagrechteEntfernung}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{GK}{AK} = \tan\alpha$

z.B. Steigung 10% => tanα = 0,1=> α ≈5,7°



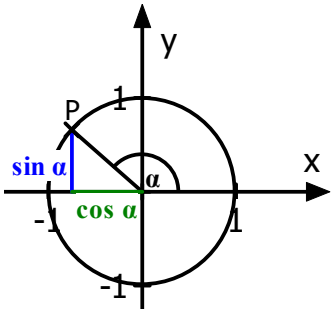
- **Beziehungen**

In einem rechtwinkligen Dreieck mit rechten Winkel γ gilt:

sin α = cos (90°- α) **cos α = sin (90° - α)**	**tan α = $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (α ≠ 90°)**	$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

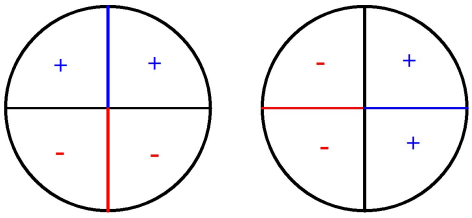
Bsp.: $1 - (\tan\alpha \cdot \sin(90° - \alpha))^2 = 1 - \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha\right)^2 = 1 - (\sin\alpha)^2 = (\cos\alpha)^2$

- **Sinus und Kosinus am Einheitskreis**



Somit gilt für die Vorzeichen:

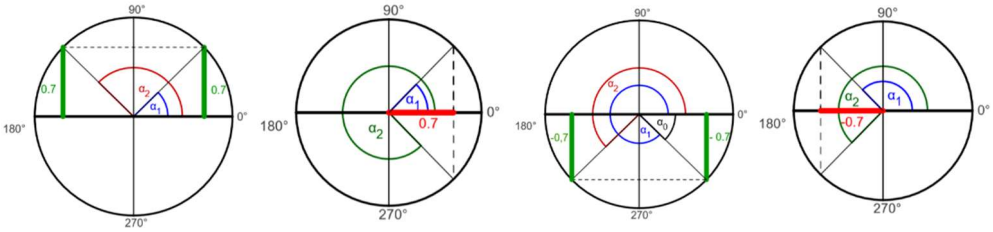
Sinus Kosinus



Daraus folgt für einen spitzen Winkel α:

sin (180° – α) = sin α	**sin (180° + α) = – sin α**	**sin (360° – α) = – sin α**
cos (180° – α) = – cos α	**cos (180° + α) = – cos α**	**cos (360° – α) = cos α**

Bsp.: a) sin α = 0,7 b) cos α = 0,7 c) sin α = - 0,7 d) cos α = - 0,7



a)	b)	c)	d)
TR: $\alpha_1 \approx 44{,}4°$	TR: $\alpha_1 \approx 45{,}6°$	TR: $-\alpha_0 \approx -44{,}4°$	TR: $\alpha_1 \approx 134{,}4°$
$\alpha_2 = 180° - \alpha_1$	$\alpha_2 = 360° - \alpha_1$	$\alpha_1 = 180° + \alpha_0 \approx 224{,}4°$	$\alpha_2 = 360° - \alpha_1$
$\approx 135{,}6°$	$\approx 314{,}4°$	$\alpha_2 = 360° - \alpha_0 \approx 315{,}6°$	$\approx 225{,}6°$

- **Sinussatz**

In jedem Dreieck ABC **verhalten** sich die **Längen zweier Seiten** wie die **Sinuswerte ihrer Gegenwinkel**:

$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$; $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$; $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$

Bsp.: b = 8cm: c = 6cm; γ = 35°; gesucht: β

$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

=> $\sin\beta = \frac{b}{c} \cdot \sin\gamma = \frac{8}{6} \cdot \sin 35° \approx 0{,}76$

=> $\beta_1 \approx 49{,}9°$ oder

$\beta_2 \approx 180° - 49{,}9° = 130{,}1°$

Da aus b > c auch β > γ gelten muss, kann β_1 **keine** Lösung sein!

- **Kosinussatz**

In jedem Dreieck ABC gilt:

$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}$

$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta}$

$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}$

Bsp.: a = 5cm; b = 7cm; c = 4cm; gesucht: α

$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{49cm^2+16cm^2-25cm^2}{2 \cdot 7cm \cdot 4cm}$

$= \frac{40}{56} = \frac{5}{7}$ => α ≈ 44,4°