Gymnasium Stein	**Lösungen** zu den Wiederholungsaufgaben zum Grundwissenkatalog Mathematik der **8. Jahrgangsstufe**

1) $m = \frac{160m}{2000m} = 0{,}08 = 8\%$

2) b)(implizite Darstellung) und f) beschreiben die Gerade g, i) beschreibt die Gerade h (y = 4)

3 a) g: y = 3x + 2 ; b) h : y = – 0,5x ; c) f : y = 0

4 a) $m = \frac{15-(-25)}{-3-7} = \frac{40}{-10} = -4 \rightarrow y = -4x + t$; $Q \in h \rightarrow 15 = -4 \cdot (-3) + t \rightarrow t = 15 - 12 = 3$

also y = – 4x + 3; $S_x : y = 0 \rightarrow x = 0{,}75 \rightarrow S_x(0{,}75|0)$; $S_y : (0|3)$

b) $R \in g$?: $-4 \cdot 100 + 3 = -397$; $y_R = -399 < -397 \rightarrow$ R liegt unterhalb von g

$S \in g$?: $-4 \cdot (-12{,}5) + 3 = 50 + 3 = 53 = y_S \rightarrow S \in g$

5 a) y = – 3x – 2 b) y = – 3x + 2 c) y = 3x + 2

6 a) explizite Form von h : 3y + 2x - 18 = 0 => 3y = -2x + 18

=> $y = -\frac{2}{3}x + 6$;

b) $2x - 1 = -\frac{2}{3}x + 6 \quad | +\frac{2}{3}x + 1$

$\frac{8}{3}x = 7 \quad | \cdot \frac{3}{8}$

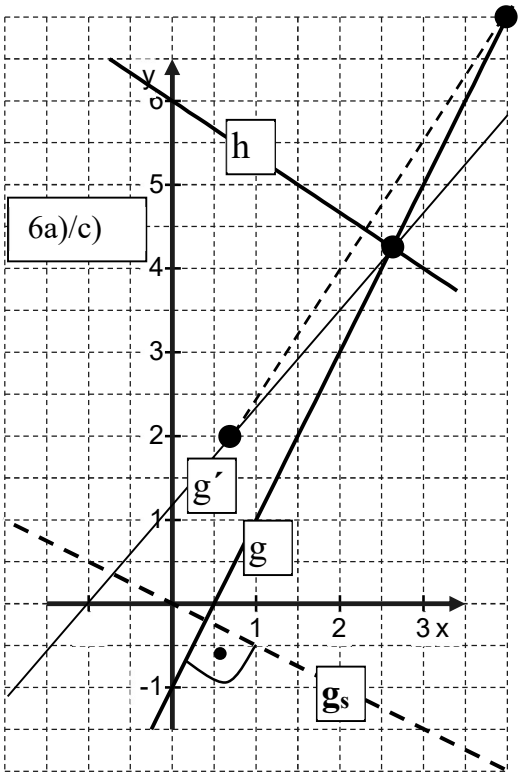
$\Rightarrow \quad x = 2{,}625$

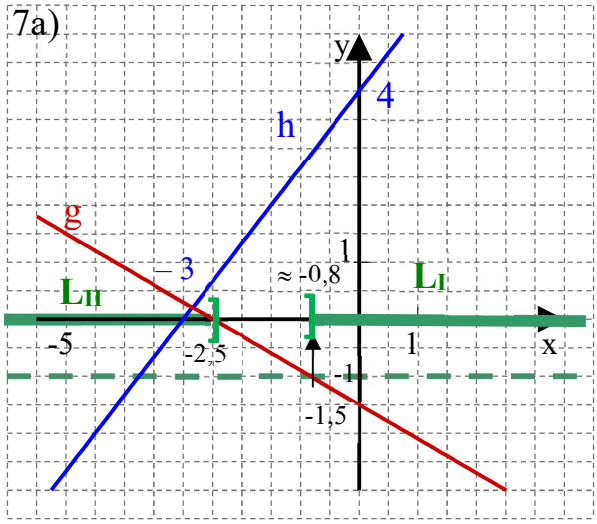
einsetzen in g: y = g(2,625) = 4,25 → S(2,625 | 4,25)

c) Spiegle einen Punkt von g an h (vgl. Zeichnung);
g´ geht außerdem durch den Schnittpunkt von g und h

d) Die gesuchte Gerade g_s muss <u>senkrecht</u> zu g sein, wenn sie sich durch Spiegelung an g nicht ändern soll!

Zeichnung ⇒ g_s : $y = -\frac{1}{2}x$





7 a) – 4x + 3y – 12 = 0 => 3y = 4x +12 => $y = \frac{4}{3}x + 4$

b) I: – 0,6x – 1,5 < – 1 | + 0,6x + 1

– 0,5 < 0,6x | : 0,6

$-\frac{5}{6} < x \rightarrow L_I =]-\frac{5}{6}; \infty[$ $\quad -0{,}8 \approx -\frac{5}{6}$

nach Zeichnung hier nur ungenau: $L_I =]-0{,}8; \infty[$

II: – 0,6x – 1,5 ≥ 0 | +0,6x

– 1,5 ≥ 0,6x | : 0,6

–2,5 ≥ x → $L_{II} =]-\infty; -2{,}5]$

8) $19 - 2x + 14 < 15 - 3x + 12 \Rightarrow 33 - 2x < 27 - 3x \Rightarrow x < -6 \Rightarrow L = \{x \mid x < -6\} =]-\infty; -6[$

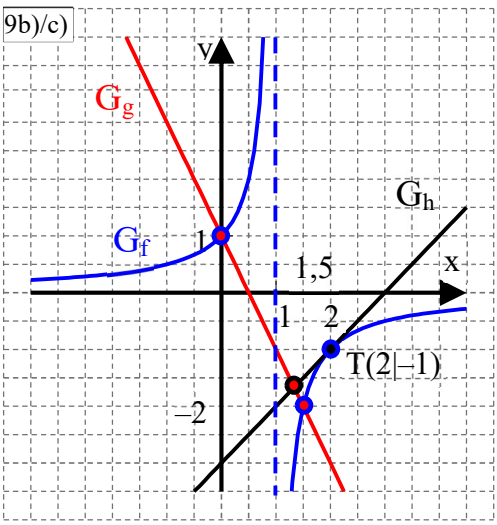
9 a) g(x) = h(x) ⇔ –2x +1 = x – 3 ⇔ $x = \frac{4}{3}$; einsetzen: $y = h(\frac{4}{3}) = \frac{4}{3} - 3 = -1\frac{2}{3}$; also $S(1\frac{1}{3} \mid -1\frac{2}{3})$

f(x) = g(x) ⇔ $-2x + 1 = \frac{1}{1-x} \quad | \cdot (1-x)$

$\rightarrow \ldots \rightarrow \quad 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x-3) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \;;\; x_2 = 1{,}5$

$y_1 = g(x_1) = 1 \;;\; y_2 = g(x_2) = -2$; also $S_1(0 \mid 1)$; $S_2(1{,}5 \mid -2)$

c) Lösungen entspricht der x-Koordinaten der gemeinsamen Punkte von G_f und G_h;
Zeichnung: ein gemeinsamer Punkt: $T(2 \mid -1)$
Lösung also $x = 2$;
Probe : $f(2) = \frac{1}{1-2} = -1$ und $h(2) = 2 - 3 = -1$ ✓



10 a) $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow D = \mathbb{Q}\setminus\{3\}$

S_x: $h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x-3} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x-3} = -2 \Leftrightarrow x = 1$; also $S_x(1|0)$

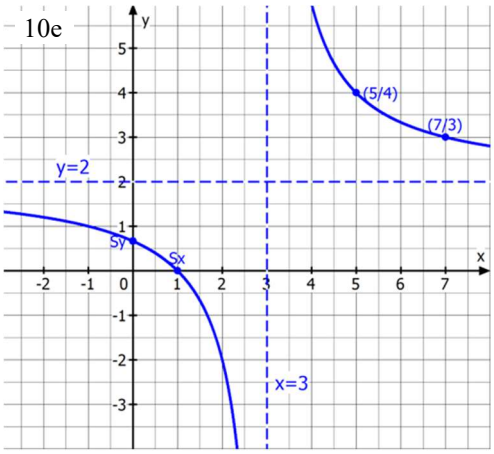
S_y: $x = 0 \Rightarrow h(0) = \frac{4}{0-3} + 2 = \frac{2}{3}$; also $S_y(0 \mid \frac{2}{3})$

b) senkrechte Asymptote: $x = 3$
waagrechte Asymptote: $y = 2$

c) $h(5) = \frac{4}{5-3} + 2 = \frac{4}{2} + 2 = 4$

d) $\frac{4}{x-3} + 2 = 3 \Leftrightarrow \frac{4}{x-3} = 1 \Leftrightarrow x = 7$

f) ① Der Graph wird um den Faktor 4 gestreckt.
② Der Graph wird um 3 Einheiten in positve x-Richtung verschoben.
③ Der Graph wird um 2 Einheiten in positive y-Richtung verschoben.



11) Der Funktionsterm lautet $f(x) = \frac{a}{x-5} - 4$.

$f(7) = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{7-5} - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{2} - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 8$

$\Rightarrow f(x) = \frac{8}{x-5} - 4$

12 a) $y = -\frac{1}{3}x + 3$ b) $y = \frac{-3}{x+1} + 1$ c) $y = \frac{3}{x}$ d) $y = 1{,}5x + 2{,}5$ f) $y = -4{,}5$

e) $y = -2x + t$ und $P(5|0) \in$ Gerade $\Rightarrow 0 = -2 \cdot 5 + t \Rightarrow t = 10 \Rightarrow y = -2x + 10$

13 a) $y:x = 6:4 = 1{,}5$

x	-2	1	0,5	4	5
y	-3	1,5	0,75	6	7,5

b) $x \cdot y = 4 \cdot 6 = 24$

x	-2	1	0,5	4	5
y	-12	24	48	6	4,8

14 a) $\frac{10x^3 - 35x^2}{105x - 30x^2} = \frac{5x^2(2x-7)}{-15x(2x-7)} = -\frac{x}{3}$ b) geht nicht! c) $2x + \frac{4}{x} = \frac{2x^2+4}{x}$ d) $2x : \frac{4}{x} = \frac{x^2}{2}$

e) $\frac{2x}{9x+3} - \frac{2x-1}{6x+2} = \frac{2x}{3(3x+1)} - \frac{2x-1}{2(3x+1)} = \frac{2 \cdot 2x}{2 \cdot 3(3x+1)} - \frac{3 \cdot (2x-1)}{3 \cdot 2(3x+1)} = \frac{4x-6x+3}{6(3x+1)} = \frac{-2x+3}{6(3x+1)}$

f) $\frac{a-3}{a^2-3a} \cdot \frac{2a}{a+3} = \frac{(a-3)2a}{a(a-3)\cdot(a+3)} = \frac{2}{a+3}$ h) $1 - \frac{x-3}{x+2} : \frac{3-x}{x+2} = 1 - \frac{-(3-x)\cdot(x+2)}{(x+2)(3-x)} = 1 - (-1) = 2$

g) $\frac{x-2}{x-x^2} + \frac{2+x}{x} = \frac{x-2}{x(1-x)} + \frac{(2+x)(1-x)}{x(1-x)} = \frac{x-2+2-2x+x-x^2}{x(1-x)} = \frac{-x^2}{x(1-x)} = \frac{-x}{1-x} = \frac{x}{x-1}$

i) $x^{-7} : x^{-4} + 4 \cdot x^{-3} \cdot x^{3} - \frac{1}{x^3} = x^{-3} + 4 \cdot 1 - x^{-3} = 4$ j) $(x+3)^{-2} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{(x+3)^2} - \frac{x+3}{(x+3)^2} = \frac{-x-2}{(x+3)^2}$

15 a) $\frac{3}{b-2} - b^{-1} + 1 = \frac{3}{b-2} - \frac{1}{b} + 1 = \frac{3b}{b(b-2)} - \frac{b-2}{b(b-2)} + \frac{b(b-2)}{b(b-2)} = \frac{3b-(b-2)+b^2-2b}{b(b-2)} = \frac{2+b^2}{b(b-2)}$

b) $T(-3) = \frac{2+9}{-3(-3-2)} = \frac{11}{15}$

16 a) $D = \mathbb{Q}$; $\frac{x}{9} = x \mid \cdot 9 \Rightarrow x = 9x \Leftrightarrow 8x = 0$; $L = \{0\}$ b) $D = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$; $9 = x^2$; $L = \{-3; 3\}$

c) $D = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$; $L = \{\}$ *(Zähler immer ≠0)* d) $D = \mathbb{Q}\setminus\{9\}$; $L = \{-1\}$

e) $D = \mathbb{Q}\setminus\{9\}$; $\frac{x+1}{x-9} = 2 \mid \cdot (x-9) \Rightarrow x + 1 = 2x - 18 \Rightarrow x = 19$; $L = \{19\}$

f) D = $\mathbb{Q}$; $\frac{x-3}{2} = x \mid \cdot 2 \Rightarrow x - 3 = 2x \Rightarrow x = -3$; L = {–3}

g) D = $\mathbb{Q}$; $(x^2 - 6x)\cdot(4x + 8) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x - 6) \cdot 4 \cdot (x + 2) = 0$; L = {0; 6; – 2}

h) D = $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$; $\frac{6}{x} + \frac{3}{5} = 3 \mid \cdot 5x \Rightarrow 30 + 3x = 15x \Leftrightarrow 12x = 30 \Leftrightarrow x = 2{,}5$; L = {2,5}

i) D = $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$; $\frac{3}{2x} - \frac{7}{3} = \frac{1{,}5}{x} \Leftrightarrow \frac{3}{2x} - \frac{7}{3} = \frac{3}{2x} \Leftrightarrow \frac{7}{3} = 0$; Widerspruch! →L = { }

k) $\frac{2-x}{3+x} = \frac{3-x}{x}$; D=$\mathbb{Q}\backslash\{0;-3\}$; „über Kreuz multiplizieren“ $\Rightarrow 2x - x^2 = 9 - x^2 \Leftrightarrow 2x = 9$; L = {4,5}

l) $\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} \mid \cdot x^2 \cdot (x+1)$; D = $\mathbb{Q}\backslash\{0; -1\}$;

$2(x+1) + x^2 = x(x+1)$

$2x + 2 + x^2 = x^2 + x \mid -x^2 - x - 2$

$x = -2$; L = {– 2}

m) $\frac{3}{2x-6} - \frac{3}{2} = \frac{4{,}5}{x-3}$; D = $\mathbb{Q}\backslash\{3\}$ $\Leftrightarrow \frac{3}{2(x-3)} - \frac{3}{2} = \frac{4{,}5}{x-3} \mid \cdot 2(x-3)$

$3x - 3(x-3) = 9 \Leftrightarrow 9 = 9$ (allgemeingültig) => L = $\mathbb{Q}\backslash\{3\}$

n) $\frac{1}{x} + \frac{6}{x^2-2x} = \frac{3}{x-2}$; $D = \mathbb{Q}\backslash\{0\,;2\}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{6}{x(x-2)} = \frac{3}{x-2} \mid \cdot x(x-2)$

$\Leftrightarrow x - 2 + 6 = 3x \Leftrightarrow 4 = 2x \Leftrightarrow x = 2 \notin D$ => L={ }

o) $\frac{3}{x^2-3} = \frac{2}{x}$; D = $\mathbb{Q}\backslash\{0; 3\}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{x(x-3)} = \frac{2}{x}$

I) über Kreuz mult. $\Rightarrow 3x = 2x^2 - 6x$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 9) = 0$

$x_1 = 0 \notin D$! ; $x_2 = 4{,}5 \rightarrow$ L = {4,5}

II) Multiplizieren mit HN = x (x – 3)

$\Rightarrow 3 = 2 \cdot (x-3) \Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = 4{,}5$; L = {4,5}

Hier einfacher, da die Nenner den gemeinsamen Faktor x haben!

17) $\frac{4+1+5+x}{3+x} = 2 \Rightarrow 10 + x = 2(3 + x) \Rightarrow x = 4$ Martina braucht noch mindestens vier Einser.

18 a) $P = \frac{U^2}{R}$; $U' = 3U \Rightarrow P' = \frac{(3\cdot U)^2}{R} = \frac{9\cdot U^2}{R} = 9 \cdot P$ b) $P = \frac{U^2}{R}$; $R' = 3R \Rightarrow P' = \frac{U^2}{3\cdot R} = \frac{1}{3} \cdot P$

19) $a = \frac{f+k}{fb}$;

=> $afb = f + k$ => $\begin{cases} \bullet\ b = \frac{f+k}{af} \\ \bullet\ k = afb - f = f(ab - 1) \end{cases}$ $\Rightarrow f = \frac{k}{ab-1}$

20 a) Zufallsexperiment, da man nicht vorhersagen kann, ob ein Gewinn oder Niete zieht.
Ω = {Gewinn, Niete}

b) Kein Zufallsexperiment, da der Wochentag eindeutig festliegt.

c) Es liegt ein Zufallsexperiment vor, da man trotz der Manipulation nicht vorhersagen, welche Augenzahl bei jedem einzelnen Wurf erscheint. Jedoch werden die Augenzahlen nicht mit gleich Wahrscheinlich auftreten. Ω = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

d) Kein Zufallsexperiment, da die Schulhaushöhe eindeutig festliegt.

e) Zufallsexperiment, da man nicht vorhersagen kann, ob 0, 1, 2 oder drei Blechdosen heruntergeworfen werden. Ω = {0; 1; 2; 3}

21) Es ist kein Laplace-Experiment, da nicht alle möglichen Augensummen gleichwahrscheinlich sind. Beispielsweise kann die Augensumme 2 nur durch eine einzige Möglichkeit, nämlich durch einen Einserpasch erzielt werden. Die Augensumme 6 kann hingegen durch 5 Möglichkeiten erreicht werden (6 = 1+5 = 2+4 = 3+3 = 4+2 = 5+1). Daher würfelt man mit einer größeren Wahrscheinlichkeit die Augensumme 6 als die Augensumme 1.

22 a) =ZUFALLSBEREICH(1;4) c) Zelle F4: =E4/10 oder =E4/D4 Zelle F5: =E5/20 oder =E5/D5
b) Zelle E4: =ZÄHLENWENN(B4:B13;1) Zelle E5: =ZÄHLENWENN(B4:B23;1)

23 a) P ({G}) = $\frac{1}{9}$ b) P ({E}) = $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ c) P ({I}) = $\frac{2}{9}$ d) P („Konsonant“) = $\frac{4}{9}$

24 a) $P(A) = \frac{1\cdot1\cdot1\cdot1}{6\cdot6\cdot6\cdot6} = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296} \approx 7{,}7 \cdot 10^{-4} = 0{,}00077 = 0{,}077\%$;

b) $P(B) = \frac{6\cdot1}{6\cdot6} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\%$; c) $P(A) = \frac{6\cdot5\cdot4}{6\cdot6\cdot6} = \frac{5}{9} \approx 55{,}6\%$;

Hier Anwendungen des Zählprinzips, z.B:

bei b) Der erste der beiden hat 6 Möglichkeiten für seine Note, weil der andere dann aber dieselbe Note haben soll, hat er nur noch 1 Möglichkeit

bei c) bei verschiedenen Noten hat der erste 6 Möglichkeiten, der zweite 5 Mögl. und der dritte 4 Mögl.

25 a) $\frac{1^8}{4^8} = \frac{1}{65536} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-5} = 0{,}0015\ \%$ b) $\frac{3^8}{4^8} = \frac{6561}{65536} \approx 10\%$ c) $\frac{1^3 \cdot 3^5}{4^8} = \frac{243}{65536} \approx 0{,}37\%$

26 a) (II) $\Rightarrow$ x = 3y – 4 (I´) x in (I´): – 3 (3y – 4) + 5y + 20 = 0
– 9y + 12 + 5y + 20 = 0
– 4y = – 32
y = 8 ; y in (I`) $\Rightarrow$ x = 20 $\rightarrow$ L = {(20 | 8)}

b) (I) $\Leftrightarrow$ 0,5x + 6y = 10
(II) $\Leftrightarrow$ 0,5x + 6y = 11
Das Gleichungssystem hat keine Lösung. Die Lösungsmenge ist leer.
Geometrische Bedeutung: Die Gleichungen I und II beschreiben zwei echt parallele Geraden.

27 a) –5 · (I): –35x + 15y – 5**a** = 0
(II) **b**x + 15y + 6 = 0 Vergleich von I) und II) $\rightarrow$ **b** = – 35 und –5**a** = 6 $\Leftrightarrow$ **a** = – 1,2

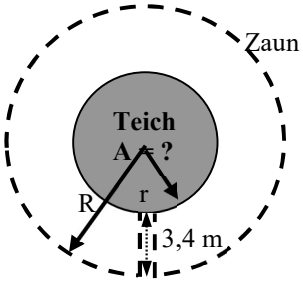
b) (I) – (II): Lösung (0|0) heißt x = y = 0 ;
Einsetzen in (I): 2·0 + 3·0 + **c** = 0 $\Rightarrow$ **c** = 0
Einsetzen in (II): **d**·0 + 3·0 + **e** = 0 $\Rightarrow$ **e** = 0; **d** kann jeden beliebigen Wert haben (Für d = 2 hat das Gleichungssystem nicht nur die Lösung (0|0), sondern unendlich viele Lösungen.)

28) x = Preis für einen Hamburger in €; y = Preis für eine Portion Pommes in €
(I) 5x + 7y + 5 · 0,8 = 18,20 $\Rightarrow$ x = (14,20 – 7y) : 5 = 2,84 – 1,4y (I´)
(II) 7x + 6y + 8 · 0,8 = 22,10 $\Rightarrow$ x in (II) : 7 · (2,84 – 1,4y) + 6y + 6,4 = 22,10
19,88 – 9,8y + 6y + 6,4 = 22,10
– 3,8y = – 4,18
y = – 4,18 : (–3,8) = 1,1
y in (I´): x = 2,84 – 1,4 · 1,1 = 1,3
A. : Ein Hamburger kostet 1,30€, für eine Portion Pommes muss man 1,10€ bezahlen.

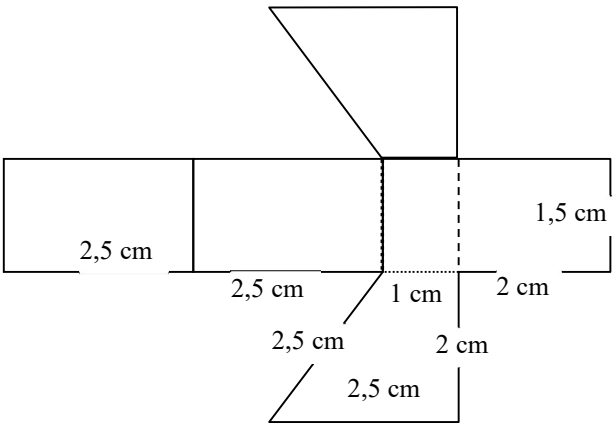
29) *Lösungsbeispiel mit zwei Variablen:* x sei das Alter von Werner, y das Alter von Gudrun.
(I) x + y = 83
(II): (x - 4) = 1,5(y - 4) $\Rightarrow$ x – 1,5y = - 2 (II')
$\Rightarrow$ (I) – (II'): y + 1,5y = 83 - (-2) $\Rightarrow$ 2,5y = 85 $\Rightarrow$ y = 34
Lösungsbeispiel mit einer Variablen: Sei x das damalige Alter von Gudrun.
Damals war Werner 1,5x Jahre alt. Heute ist Gudrun x + 4 Jahre alt, Werner 1,5x + 4 Jahre alt.
(x + 4) + (1,5x + 4) = 83 $\Rightarrow$ 2,5x = 83 - 8 $\Rightarrow$ x = 30.
Damals war Gudrun 30, Werner 45. Heute sind sie 34 bzw. 49 Jahre alt.
Es gibt zahlreiche andere Ansätze, die auch zum Ziel führen, je nachdem, welches Alter mit x bzw. y abgekürzt wird.

30) Umfang: $U = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3cm \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1cm \cdot \pi + 4cm + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 4cm \cdot \pi = 6cm \cdot \pi + 4cm \approx 22{,}8cm$
Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot (3cm)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot (1cm)^2 \cdot \pi + 4{,}0cm \cdot 4{,}0cm - \frac{1}{4} \cdot (4cm)^2 \cdot \pi = 16cm^2$

31) U = 2·R π $\Rightarrow$ R = U:(2π) = 94,6m : (2π) = 15,05 ... m
r = R – 3,4 m = 15,05 ... m – 3,4 m = 11,65 ... m
A = $r^2\pi$ = (11,65 ...m)^2 · π = 426,8 ... m^2 ≈ 430 m^2

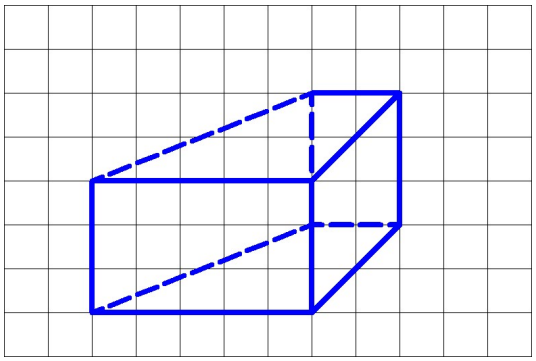


32 a) *Zeichnung hier verkleinert:*

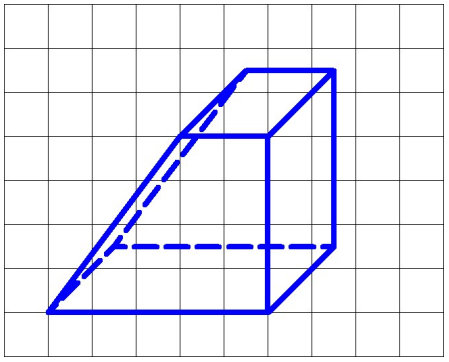


b) Die Vorderfläche wird in wahrer Größe gezeichnet. Senkrecht zur Vorderfläche verlaufende Seitenkanten werden unter einem Winkel von 45° und um den $k \approx 0{,}7$ verkürzt gezeichnet (d.h. 1 cm ≙ 1 Kästchendiagonale).

stehend:



liegend:



c) Volumen : $V_P = G_P \cdot h_P$ mit G_P = Trapezflächeninhalt $= \frac{1}{2}(2{,}5\text{cm} + 1\text{cm}) \cdot 2\text{cm} = 3{,}5\ \text{cm}^2$ und $h_P = 1{,}5$ cm

$\Rightarrow V_P = 3{,}5\ \text{cm}^2 \cdot 1{,}5\ \text{cm} = 5{,}25\ \text{cm}^3$

Oberflächeninhalt: $O_P = 2 \cdot G_P + M_p$

mit M_P = Summe aller Seitenrechtecksflächen

$= (2{,}5\text{cm} + 2{,}5\text{cm} + 1\text{cm} + 2\text{cm}) \cdot 1{,}5\text{cm} = 12\ \text{cm}^2$

$\Rightarrow O_P = 2 \cdot 3{,}5\ \text{cm}^2 + 12\ \text{cm}^2 = 19\ \text{cm}^2$

33 a) $O = 8G \quad \Leftrightarrow \quad 2r^2\pi + 2r\pi h = 8\,r^2\pi \quad \Leftrightarrow \quad 2r\pi h = 6\,r^2\pi \quad \Leftrightarrow \quad h = 3r$

b) $V = r^2\pi h = r^2\pi \cdot 3r = 3r^3\pi = 3\cdot(25\text{cm})^3\pi = 147262{,}1...\ \text{cm}^3 \approx 150$ Liter