Übungsaufgaben mit Lösungen findest du unter **www.mathegym.de** !

Funktionen

Zur Angabe einer Funktion gehören
- **Definitionsmenge** D
- **Funktionsvorschrift** $x \mapsto y$
- **Funktionsterm** $f(x)$
- **Funktionsgleichung** $y = f(x)$

Aus diesen Angaben ergibt sich die **Wertemenge** W

Bei einer Funktion wird einer Größe x **eindeutig** eine Größe y zugeordnet.

Beispiel: *Ein Stein fällt aus einer Höhe von 80 m in 4 s zu Boden.*

Für *x = Zeit in Sekunden* gilt hier also **D** = [0 ; 4]

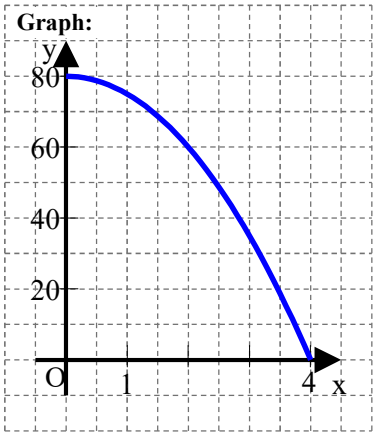
Jedem Zeitpunkt x kann eindeutig eine Höhe y zugeordnet werden!

Wertetabelle *(z.B. aus Experiment):*

x in s	0	1	2	3	4
y in m	80	75	60	35	0

$f(x) = 80 - 5x^2$ (Funktionsterm)
$y = 80 - 5x^2$ (Funktionsgleichung)

W = [0 ; 80] *(„Menge der y“)*



Die lineare Funktion

- Funktionsgleichung $y = m \cdot x + t$
- Steigung $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- y-Abschnitt t
- Der **Graph** einer linearen Funktion ist eine **Gerade**

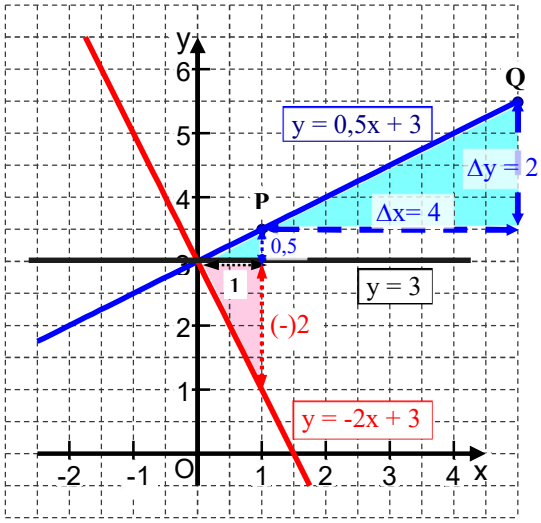
Funktionsgleichung:
$y = m \cdot x + t$

Steigung y-Abschnitt

Bsp.: $y = -2 \cdot x + 3$

m > 0 ⇔ Gerade **steigt**
m < 0 ⇔ Gerade **fällt**
m = 0 ⇔ Gerade ist **parallel zur x-Achse**

Zeichnen z.B. mit Hilfe des **y-Abschnitts** und **Steigungsdreiecks** (vgl. Zeichnung):
um 1 nach rechts, dann um die Steigung nach oben bzw. unten (Vorzeichen beachten)



Berechnung der Steigung m aus den Koordinaten zweier Geradenpunkte (im Bsp. P(1|3,5) und Q(5|5,5)):

$$\boxed{\text{Steigung } m = \frac{\text{Höhenunterschied}}{\text{waagrechte Entfernung}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}} = \frac{5{,}5 - 3{,}5}{5 - 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Also : y = 0,5x + t;
Einsetzen eines Geradenpunkts (z.B. P) **liefert t**: $3{,}5 = 0{,}5 \cdot 1 + t \Rightarrow t = 3$

Auch **implizite Form** möglich (Bsp.: 3x+5y –20 = 0). Durch **Auflösen nach y** erhält man die **explizite Form** (im Bsp. : y = –0,6x + 4).

- Spezialfall: **direkte Proportionalität**

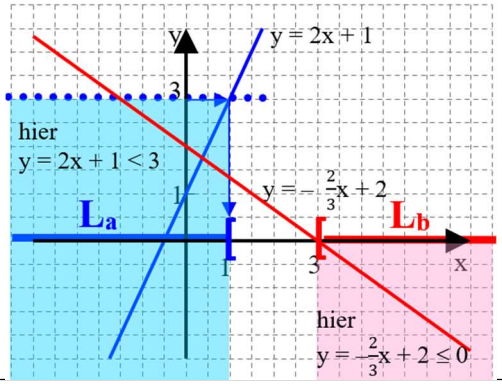
Bei direkt proportionalen Größen gehört zum **r-fachen der einen Größe** das **r-fache der anderen Größe**, d.h. beide Größen ändern sich im gleichen Verhältnis.

$\mathbf{y = m \cdot x \Leftrightarrow \frac{y}{x} = m = const.}$

Die Wertepaare x und y sind **quotientengleich**. m heißt **Proportionalitätsfaktor**. Der Graph ist eine **Ursprungsgerade**.

Lineare Ungleichungen

Umkehrung des **Ungleichheitszeichens** bei **Multiplikation** mit **negativer** Zahl bzw. **Division** durch **negative** Zahl.



a) $2x + 1 < 3 \quad |-1$

$2x < 2 \quad |:2$

$x < 1$

$L_a =]-\infty ; 1[$

b) $-\frac{2}{3}x + 2 \leq 0 \quad |-2$

$-\frac{2}{3}x \leq -2 \quad |\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$

$x \geq 3$

$L_b = [3 ; \infty[$

Elementare gebrochen-rationale Funktionen

Allgemein: $\boldsymbol{f: x \mapsto \frac{a}{x+b} + c}$

Werte, für die der Nenner null wird, dürfen nicht in den Funktionsterm eingesetzt werden. Man nennt diese **Definitionslücken** und muss die von der Definitionsmenge ausschließen: $\mathbf{D_f = \mathbb{Q}\backslash\{-b\}}$

- **Definitionsmenge**

Der Graph der Funktion f ist eine **Hyperbel**.

- **Graph**

Den Graphen der Funktion $\boldsymbol{f: x \mapsto \frac{a}{x}}$ erhält man aus dem Graphen von $x \mapsto \frac{1}{x}$ durch eine **Streckung um den Faktor a für a > 0** bzw. eine **Streckung um den Faktor |a| und eine Spiegelung an der x-Achse für a < 0.**

Den Graphen der Funktion $\boldsymbol{f: x \mapsto \frac{a}{x+b} + c}$ erhält man aus dem Graphen von $x \mapsto \frac{a}{x}$ durch

… eine **Verschiebung um b Einheiten in negative x-Richtung für b > 0** bzw. **um |b| Einheiten in positive x-Richtung für b < 0**

… eine **Verschiebung um c Einheiten in positive y-Richtung für c > 0** bzw. **um |c| Einheiten in negative y-Richtung für c < 0**.

- **Achsenschnittpunkte**

Achsenschnittpunkte: Schnittpunkt mit **y-Achse**: Berechnung von **f(0)**

Schnittpunkt mit **x-Achse**: Lösung von **f(x) = 0**

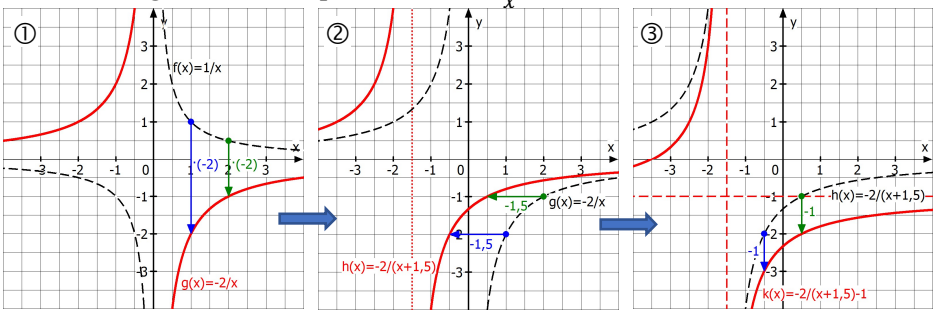
- **Asymptote**

Eine Gerade, der sich der Graph einer Funktion beliebig nähert, ohne zu berühren, nennt man **Asymptote**.

Die **Koordinatenachsen** sind die Asymptoten des Graphen von $\boldsymbol{x \mapsto \frac{a}{x}}$. Der Graph von $\boldsymbol{x \mapsto \frac{a}{x+b} + c}$ hat die **senkrechte Asymptote** mit der Gleichung **x = -b** und die **waagrechte Asymptote** mit der Gleichung **y = c**.

Bsp.: k(x) = $\frac{-2}{x+1,5} - 1$ *mit* $D_k = \mathbb{Q}\backslash\{1,5\}$

Entstehung aus dem Graphen von $x \mapsto \frac{1}{x}$:



①Streckung um den Faktor |-2| = 2 und Spiegelung an der x-Achse

② Verschiebung um 1,5 Einheiten in negative x-Richtung

③ Verschiebung um |-1| = 1 Einheiten in negative y-Richtung

Achsenschnittpunkte: k(0) = $2\frac{1}{3}$ *=> $S_y(0/2\frac{1}{3})$;*

$\frac{-2}{x+1,5} - 1 = 0 \iff \frac{-2}{x+1,5} = 1 \iff -2 = x + 1,5 \iff x = -3,5 \Rightarrow S_x(-3,5/0)$

senkrechte Asymptoten: x = -1,5 *waagrechte Asymptote: y = -1*

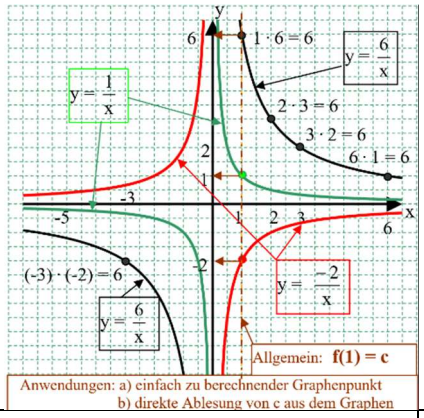
Bei indirekt proportionalen Größen gehört zum **r-fachen der einen Größe** der **r-te Teil** (d.h. das $\frac{1}{r}$**-fache**) **der anderen Größe**.

Die Zuordnungsvorschrift lautet $x \mapsto \frac{a}{x}$.

Der Graph ist eine Hyperbel.

$y = \frac{a}{x} \Leftrightarrow x \cdot y = a = const$.

Die Wertepaare x und y sind **produktgleich**.



- Spezialfall: **indirekte Proportionalität**

Prinzipiell gelten die gleichen Regeln wie bei Bruchzahlen!

z.B. zum Addieren und Subtrahieren: *Erweitern auf den Hauptnenner und vereinfachen:* $\frac{b}{2a-b} + \frac{a-b^2}{2ab-b^2} = \frac{b^2+a-b^2}{b(2a-b)} = \frac{a}{2ab-b^2}$

Rechnen mit **Bruchtermen** (Grundrechenarten)

Für a,b ≠ 0 und p,q∈ℤ gilt:

1. Potenzen mit **gleicher Basis**: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ bzw. $a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
2. Potenzen mit **gleichem Exponenten**: $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$

   bzw. $a^p : b^p = \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p = (a : b)^p$
3. Potenzen **von Potenzen**: $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

außerdem: $a^1 = a$ $\quad a^0 = 1$ $\quad a^{-1} = \frac{1}{a}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{b}{a}\right)^1 = \frac{b}{a}$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p$ $\quad a^{-p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p = \frac{1}{a^p}$

Bsp.: $\left(\frac{2}{5}\right)^{-9} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 : \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-5} : \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-5+3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$

$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{4} : \frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$

$\left(\left(-\frac{x}{2}\right)^{-3}\right)^2 = \left(-\frac{x}{2}\right)^{-3 \cdot 2} = \left(-\frac{x}{2}\right)^{-6} = \left(-\frac{2}{x}\right)^6 = +\frac{2^6}{x^6} = \frac{64}{x^6}$

Potenzgesetze

Multiplikation mit dem Hauptnenner; danach kürzen:

$\frac{x-1}{x} = 2 - \frac{x}{x+1} \quad | \cdot x(x+1) \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{-1;0\}$

$\frac{(x-1) \cdot x(x+1)}{x} = 2x(x+1) - \frac{x \cdot x(x+1)}{x+1}$

$(x-1)(x+1) = 2x(x+1) - x^2$

Auflösen nach x: … $x = -\frac{1}{2} \in D$

Lösen von **Bruchgleichungen**

Kreuzweise multiplizieren

(nur sinnvoll bei "teilerfremden Nennern"; vgl. Wiederholungsaufgabe Nr. 15o)

$\frac{2}{x-3} = \frac{3}{x}$

<=> 2x = 3(x-3)

<=> x = 9

Einfacher **Spezialfall**: Auf beiden Seiten der Gleichung nur je ein Bruch

---

Auflösen von $D = \frac{F}{s-s_0}$ *nach* s: $D(s - s_0) = F \Rightarrow \ldots \Rightarrow s = \frac{F}{D} + s_0$

Auflösen von $R = \frac{U-U_0}{\frac{U_0}{R_{ges}}}$ *nach* R_{ges}: $R \cdot \frac{U_0}{R_{ges}} = U - U_0 \Rightarrow R_{ges} = R \cdot \frac{U_0}{U-U_0}$

Auflösen von **Formeln**

Merkmale eines **Zufallsexperiments**:

1. Es wird genau ein Ergebnis von mehreren möglichen Ergebnissen eintreten.
2. Es lässt sich nicht vorhersagen, welches Ergebnis eintreten wird.

Zufallsexperimente

Für die **Simulation und Auswertung** von Zufallsexperimenten mit einem Tabellenkalkulationsprogramm benötigt man u.a. folgende Funktionen:
ZUFALLSBEREICH(Untere_Zahl; Obere_Zahl):
erzeugt zufällig eine ganze Zahl aus dem angegebenen Bereich; *z. B. liefert ZUFALLSBEREICH(1;3) mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit eine der Zahlen 1, 2 oder 3.*
ZÄHLENWENN(Bereich; Suchkriterien)
zählt im angegebenen Bereich alle Zellen mit einem bestimmten Eintrag, *z. B. wird mit ZÄHLENWENN(A1:A10;3) gezählt, wie oft in den Zellen A1 bis A10 die Zahl 3 steht.*

Grundbegriffe

Ergebnismenge Ω: Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments

Ereignis: Jede Teilmenge der Ergebnismenge
Die Ergebnismenge Ω (**sicheres** Ereignis) und die leere Menge ∅ (**unmögliches** Ereignis) sind auch Teilmengen von Ω und somit Ereignisse.
Ein **Ereignis A tritt ein**, wenn bei der Durchführung des Zufallsexperiments ein Ergebnis aus A auftritt.
Alle Ergebnisse, die nicht zum Ereignis A gehören, bilden das **Gegenereignis $\overline{A}$**. (kurz: $\overline{A} = \Omega \backslash A$)

Zufallsexperiment: Werfen eines Würfels
Ergebnismenge Ω={1; 2; 3; 4; 5; 6}
Ereignisse: A={2; 4; 6} (gerade Augenzahl); B={6} (Augenzahl 6); C={1; 2; 3} (Augenzahl kleiner 4); D={1; 2; 3; 4; 5; 6}=Ω (sicheres Ereignis); E={}=∅ (unmögliches Ereignis)
Gegenereignisse: $\overline{A}$ = {1; 3; 5} (ungerade Augenzahl); $\overline{B}$ ={1; 2; 3; 4; 5} (Augenzahl ungleich 6); $\overline{C}$={4; 5; 6} (Augenzahl größer 3); $\overline{D}$={}=∅; $\overline{E}$=Ω

Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Empirisches Gesetz der großen Zahlen:
Die relative Häufigkeit eines Ereignisses stabilisiert sich mit zunehmender Versuchanzahl um eine festen Wert.

Bei einem Zufallsexperiment wird jedem Ereignis A eine **Wahrscheinlichkeit P(A)** zwischen null und eins zugeordnet. Diese kann unmittelbar durch das Experiment nahe gelegt werden *(z.B. Münzwurf: P(„Wappen“)=0,5)* oder auch durch die sich stabilisierende relative Häufigkeit des Ereignisses *(z.B. Werfen eines Reißnagels P(„Kopf“)*.

Laplace-Experimente

Laplace-Experimente sind Zufallsexperimente, bei denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind. Hat ein Laplace-Experiment n Ergebnisse, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis $\frac{1}{n}$.
Bei Laplace-Experimenten kann man die Wahrscheinlichkeit P(A) eines Ereignisses A berechnen durch $\boldsymbol{P(A)} = \frac{\textbf{Anzahl der Ergebnisse, bei denen das Ereignis A eintritt}}{\textbf{Anzahl aller möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
Bsp.: In einer „Urne“ befinden sich 6 grüne und 14 rote Kugeln. Es wird zufällig eine Kugel gezogen. P(„rote Kugel“)=$\frac{14}{20}$ = 0,7=70%

Bestimmung von Anzahlen

Zählprinzip: Zieht man aus n verschiedenen Mengen mit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Elementen jeweils ein Element, so gibt es insgesamt $\mathbf{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ Anzahl von Möglichkeiten.
Bsp.: Auf der Speisekarte werden a_1 = 2 Vorspeisen, a_2 = 4 Hauptgerichte und a_3 = 3 Nachspeisen angeboten. Es lassen sich 2 · 4 · 3 = 24 verschiedene dreigängige Menüs zusammenstellen.

Anordnung von Objekten: Möchte man n Objekte anordnen, d.h. n Objekte nacheinander aus einer Urne ziehen, so gibt es dafür **n · (n – 1) · (n – 2) · … · 2 · 1** Möglichkeiten. Kurz: n · (n – 1) · (n – 2) · … · 2 · 1 = **n!** (sprich: n Fakultät)

Bsp.: Es sollen sich 5 Schüler nebeneinander aufstellen. Dazu gibt es 5! = 5·4·3·2·1 = 120 verschiedene Möglichkeiten.

Bei „komplexeren“ Zufallsexperimenten kann man die Gesamtanzahl möglicher Ergebnisse mithilfe eines **Baumdiagramms** veranschaulichen.

Lineare Gleichungssysteme

Rechnerische Lösung: Rückführen auf **eine Gleichung** mit **einer Variablen** durch **Elimination der anderen Variablen** (z.B. mit Einsetzverfahren)

Graphische Lösung: Jede **Gleichung** beschreibt eine **Gerade**. Die **Koordinaten des Schnittpunkts** der Geraden stellen die **Lösung** des Gleichungssystems dar.

Bsp.:

(I) $2x - y = 3$

(II) $x - 3y = -6$

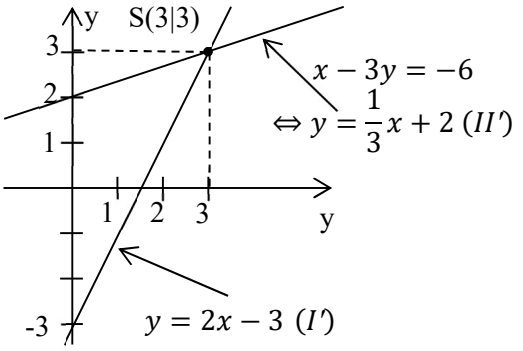
(I) ⇒ $y = 2x - 3$ (I′)

y in (II): $x - 3(2x - 3) = -6$

…… → $x = 3$

x in (I′): $y = 2\cdot 3 - 3 \Rightarrow y = 3$

$L = \{ (3/3) \}$



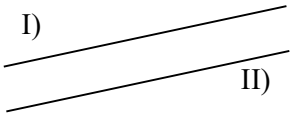
Sonderfälle für das allgemeinen Gleichungssystems

(I) ax + by + c = 0

(II) dx + ey + f = 0

a) Die beiden Geraden sind identisch.
⇔ Gleichungssystem ergibt allgemeingültige Gleichung.
⇔ L = {(x|y) | ax + by + c = 0}

b) Die beiden Geraden sind parallel.
⇔ Gleichungssystem ergibt Widerspruch.
⇔ L = { }

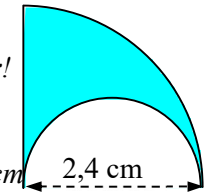


Kreis

Kreis: **$A = r^2\pi$**

Kreisumfang: **$U = 2r\pi$** (r: Kreisradius; $\pi \approx 3{,}14$)

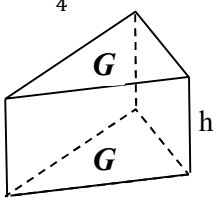
Bsp.: Berechne Flächeninhalt und Umfang der nebenstehenden Figur!



$A = \frac{1}{4} \cdot (2{,}4cm)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot (1{,}2cm)^2 \cdot \pi = 0{,}72cm^2 \cdot \pi \approx 2{,}3\ cm^2$

$U = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2{,}4cm \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1{,}2cm \cdot \pi + 2{,}4cm = 2{,}4cm \cdot (\pi + 1) \approx 9{,}9cm$

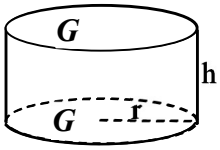
gerades Prisma



Grundfläche G: Vieleck;
Mantelfläche M: alle rechteckigen Seitenflächen zusammen;
Höhe h: Abstand der kongruenten Grund- und Deckfläche
Prismavolumen: **V = G·h**
Oberfläche des Prismas: **O = 2·G + M**

gerader Zylinder

Grundfläche M: Kreis mit Radius r;
Mantelfläche M: Rechteck mit Seitenlängen h und U = 2πr
Höhe h: Abstand der kongruenten Grund- und Deckfläche
Zylindervolumen: **$V = G\cdot h = r^2\pi\cdot h$**
Zylinderoberfläche: **$O = 2\cdot G + M = 2\cdot r^2\pi + 2r\pi\cdot h$**



Bsp.: Berechne Volumen und Oberflächeninhalt für folgende Körper mit der Höhe 3cm:

a) Prisma mit rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche (Seitenlängen a=4cm, b=3cm und c=5cm; a und b sind rechtwinklig)

b) Zylinder mit Grundkreisradius r = 4,0 cm

a) $G_P = 0{,}5\cdot 4cm\cdot 3cm = 6cm^2$; $V_P = 6cm^2 \cdot 3cm = 18cm^3$

$O_P = 2\cdot 6cm^2 + 4cm\cdot 3cm + 3cm\cdot 3cm + 5cm\cdot 3cm \approx 48cm^2$

b) $G_Z = (4cm)^2\cdot\pi = 16\pi\ cm^2$; $V_Z = 16\pi\ cm^2 \cdot 3cm = 48\pi cm^3 \approx 151cm^3$

$O_Z = 2\cdot 16\pi\ cm^2 + 2\cdot 4cm\cdot\pi\cdot 3cm = 56\pi\ cm^2 \approx 176cm^2$