Gymnasium Stein	**LÖSUNGEN** zu den Aufgaben zum Grundwissenkatalog Mathematik der **10. Jahrgangsstufe**

1) $V = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{1}{6} (6\text{cm})^3 \pi = 36\pi\ \text{cm}^3 \approx 113\ \text{cm}^3$;

$O = \frac{1}{8} O_{\text{Kugel}} + 3 \cdot \frac{1}{4} A_{\text{Kreis}} = \frac{1}{8} \cdot 4r^2\pi + \frac{3}{4} r^2\pi = \frac{5}{4} r^2\pi = \frac{5}{4} (6\text{cm})^2 \pi \approx 141\ \text{cm}^2$

2) $O' = (100\% - 36\ \%) \cdot O = 0{,}64 \cdot O \Rightarrow 4 \cdot r'^2\pi = 0{,}64 \cdot 4r^2\pi$

$\Rightarrow r'^2 = 0{,}64 \cdot \pi \quad \Rightarrow r' = 0{,}8 \cdot r$ (oder einfach $U \sim r$!)

$U = 2r'\pi = 2 \cdot 0{,}8 \cdot r \cdot \pi = 0{,}8 \cdot 2r\pi = 0{,}8 \cdot U \rightarrow$ Verkleinerung um 20%

$V = \frac{4}{3} (0{,}8r)^3 \pi = 0{,}8^3 \cdot V = 0{,}512 \cdot V \rightarrow$ Verkleinerung um 48,8%

3) Für die kleinen Kugeln gilt: $V' = \frac{1}{64} V \Rightarrow r' = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} r = \frac{1}{4} r\ (V \sim r^3)$

$\Rightarrow O' = \left(\frac{1}{4}\right)^2 O = \frac{1}{16} O\ (O \sim r^2) \Rightarrow O'_{\text{gesamt}} = 64 \cdot \frac{1}{16} O = 4\ O$;

$\Rightarrow \Delta O = O' - O = 3\ O \rightarrow$ Zunahme um 300% (allgemein: n^3 kleine Kugeln $\rightarrow O'_{\text{gesamt}} = n \cdot O$)

4) a) 60° b) 150° c) 135° d) $\frac{3}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 42{,}97°$ e) $\frac{\pi}{2}$ f) $\frac{\pi}{12}$ g) $\frac{4}{3}\pi$

5) $b = \frac{\mu}{180°} R\pi \Rightarrow R = \frac{180°}{\mu \cdot \pi} b = \frac{180°}{7{,}2° \cdot \pi} \cdot 800\,\text{km} = 6366{,}1 \ldots \text{km} \approx 6400\ \text{km}$

6) $b = \frac{\alpha}{180°} r\pi \Rightarrow \alpha = \frac{b}{r\pi} \cdot 360° = \frac{5\text{cm}}{4\text{cm} \cdot \pi} \cdot 180° = 71{,}619\ldots° \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 35{,}809\ldots°$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{r} \Rightarrow h = r \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 3{,}24 \ldots \text{cm}$; $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{r} \Rightarrow s = 2r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 4{,}68 \ldots \text{cm}$;

$A_{\text{Segment}} = A_{\text{Sektor}} - A_{\Delta} = \frac{1}{2} b \cdot r - \frac{1}{2} s \cdot h = 10\ \text{cm}^2 - 7{,}59\ldots\ \text{cm}^2 \approx 2{,}4\ \text{cm}^2$

7) a) $P(\overline{T}) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 60\%$

b) $P_B(T) = \frac{7}{18} \approx 38{,}9\%$

	T = "eingetrocknet"	$\overline{T}$	gesamt
B = "blau"	**7**	11	**18**
nicht blau	**5**	7	**12**
gesamt	12	18	30

8) a) $P\ (2\text{xrot}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 20\%$ b) $P_{2\text{xrot}}(\text{Karten aus 2. Kuvert}) = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{5}} = \frac{3}{4} = 75$

9) *Zur Erläuterung der folgenden Überlegungen betrachte das nachfolgendeBaumdiagramm!*
Wir gehen (z.B.) von 1000 Versuchpersonen aus *(bei 100 Personen wären z.B. nur „0,2“ Personen infiziert)* .

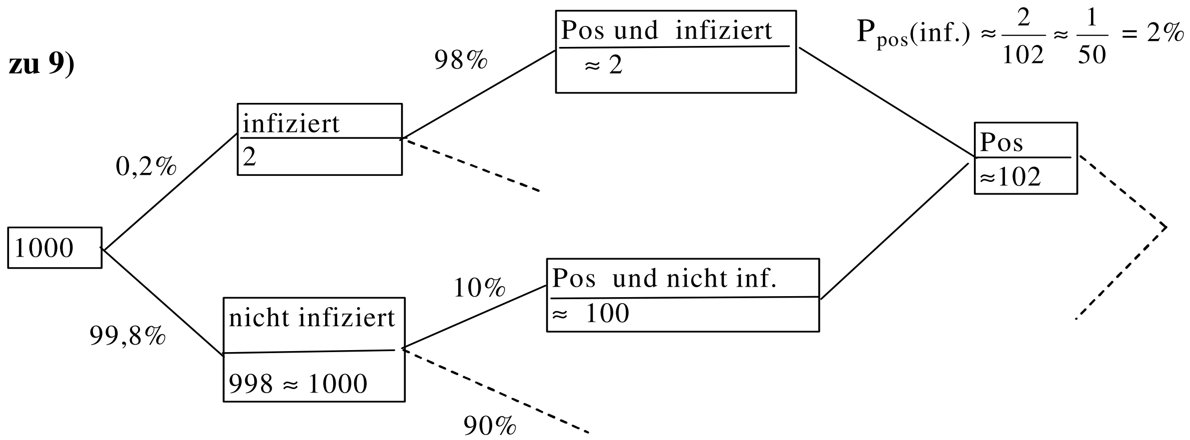
a) 0,2% davon, also 2 sind infiziert , die Infektion wird mit 98% (≈100%) Sicherheit erkannt
→ unter den 1000 Personen sind also **etwa 2 , die ein positives Testergebnis haben und infiziert sind**

b) Auch bei den 998 (≈1000) Gesunden kommen Fälle mit positiver Diagnose vor:
mit einer Wahrscheinlichkeit von 100% − 90% = 10%
→ 10% von ca. 1000 Personen = **100 Personen sind gesund und haben ein positives Testergebnis**

c) **von insgesamt ca. 102 Personen mit positivem Testergebnis sind nur ca. 2 infiziert.**

→ **Du bist also nur mit einer Wahrscheinlichkeit von ca.** $\frac{2}{102} \approx \frac{2}{100}$ **= 2% infiziert!**

zu 9)



$P_{pos}(\text{inf.}) \approx \frac{2}{102} \approx \frac{1}{50} = 2\%$

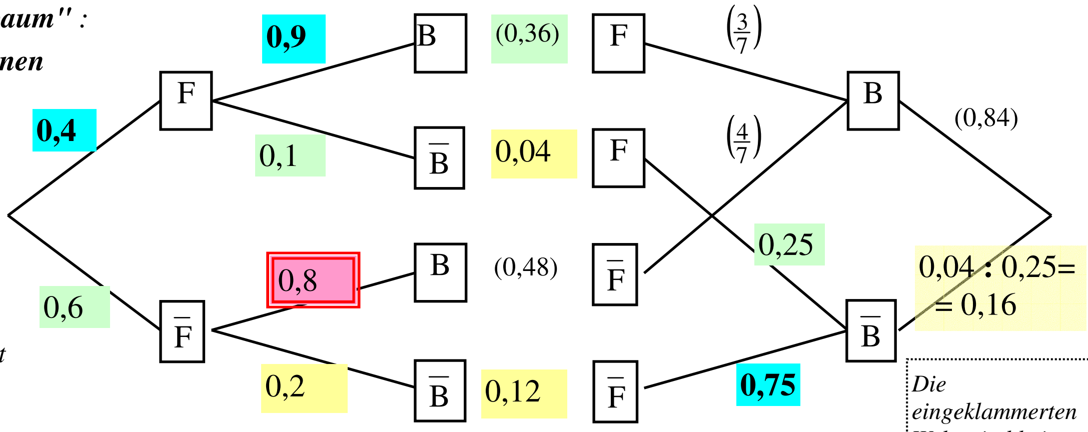
10) Gegeben: $P(F) = 0{,}4$; $P_F(B) = 0{,}9$; $P_{\overline{B}}(\overline{F}) = 0{,}75$; gesucht: $P_{\overline{F}}(B)$

Lösung mit ***"Doppelbaum"*** *:*

I) Eintrag der ***gegebenen*** *Wskt.(**fett**)*

II) Wskt. mit Pfadregeln ergänzen

Erläuterungen dazu (diese Rechnungen muss man nicht (alle) hinschreiben- zumindest nicht so ausführlich) :



Die eingeklammerten Wskt. sind bei *<u>dieser</u>* *Lösung nicht nötig; man kann sich aber genau so gut auch anders zum Ziel "durchhangeln"*

$P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(F) = P(\overline{B}\cap F) \Rightarrow P(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B}\cap F)}{P_{\overline{B}}(F)} = \frac{0{,}04}{0{,}25} = 0{,}16$; $P(\overline{B}\cap\overline{F}) = P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(\overline{F}) = 0{,}16\cdot 0{,}75 = 0{,}12$

$P(\overline{F})\cdot P_{\overline{F}}(\overline{B}) = P(\overline{B}\cap\overline{F}) \Rightarrow P_{\overline{F}}(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B}\cap\overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{0{,}12}{0{,}6} = 0{,}2$; $P_{\overline{F}}(B) = 1 - P_{\overline{F}}(\overline{B}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

Bei der Lösung **mit Vierfeldertafel** (gegebene Wskt fett)
hat man weniger "graphische Unterstützung" ;
Für $P(\overline{B})$ braucht man: $P_{\overline{B}}(F) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$
$\Rightarrow$ Berechnung von $P(\overline{B})$ wie oben $\rightarrow$ eintragen
Der Rest ist hier anders als oben – man könnte diesen Weg auch bei der "Doppelbaumlösung" wählen: $P(\overline{F}\cap\overline{B}) = 0{,}16 - 0{,}04 = 0{,}12$; $P(\overline{F}\cap B) = 0{,}6 - 0{,}12 = 0{,}48$

	F	$\overline{F}$	
B	**0,9** · 0,4 = 0,36	0,6 – 0,12 = 0,48	*0,84*
$\overline{B}$	0,4 – 0,36 = 0,04	0,16 – 0,04 = 0,12	*0,16*
	0,4	1 – 0,4 = 0,6	**1**

11) a) $P(K \cap \overline{D})$ b) $P_D(K)$ c) $P_K(D)$ d) $P_{\overline{K}}(D)$

e) z.B.: Wskt, dass der Patient gesund ist, wenn die Diagnose „gesund“ lautet.
f) z.B.: Wskt, dass die Diagnose „gesund“ lautet. wenn der Patient die Krankheit hat.
g) z.B.: Wskt, dass der Patient die Krankheit hat und die Diagnose "krank" lautet.

12) WG = "Windkraftgegner" ; ***Vierfeldertafel*** *nicht verlangt, aber sinnvoll*

a) Oberberg: $\frac{231}{258} \approx 89{,}5\%$

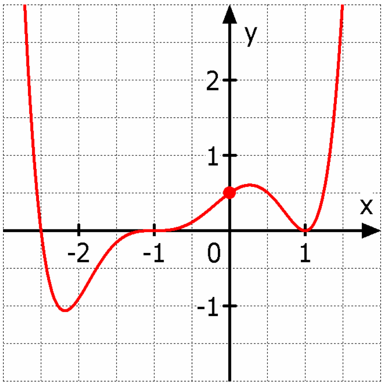
Niederberg: $\frac{660}{1722} \approx 38{,}3\%$

absolute Häufigkeiten	**WG**	$\overline{\text{WG}}$	
Oberberg	*258–27=231*	**27**	**258**
Niederberg	*1722–1062=* 660	*1089–27=* 1062	**1722**
	1980-1089 = 891	**1089**	*258+1722=* 1980

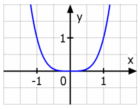
b) $p_1 = \frac{231}{1980} \approx 11{,}7\%$; ; $p_2 = \frac{231}{891} \approx 25{,}9\%$;

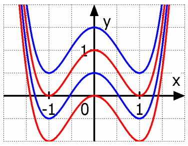
c) $p_1 = \frac{|O \cap WG|}{1980} \leq \frac{|O \cap WG|}{|WG|} = p_2$

13)



16) a) höchstens 7 und mindestens eine
b) 1 oder 3 oder 5 (ungerade Zahl)
c) höchstens 8
d) höchstens 4





Bsp. zu d): $y = x^4$ $\quad y = (x-1)^2(x+1)^2 + t$

$t \in \{-1; -0{,}5; 0; 0{,}5\}$

14) $f(x) = 0{,}1 \cdot x \cdot (3x - 2x^2) \cdot (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 4x + 4) =$

$= 0{,}1 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot (1{,}5 - x) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)(x + 2)^2 =$

$= -0{,}2 \cdot x^2 \cdot (x - 1{,}5) \cdot (x - 2)(x + 2)^3$

also $x_1 = 0$ (doppelt) ; $x_2 = 1{,}5$ (einfach) ;

$x_3 = 2$ (einfach) ; $x_4 = -2$ (dreifach)

15) Differenzfunktion: $d(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30$

d hat bei 2 eine Nullstelle →

$(x^3 + 6x^2 - x - 30) : (x - 2) = x^2 + 8x + 15 =$

$\underline{x^3 - 2x^2}$ $\qquad = (x + 3)(x + 5)$

$8x^2 - x$ $\qquad \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -3 \; ; x_3 = -5}}$

$\underline{8x^2 - 16x}$

$15x - 30$

$\underline{15x - 30}$

0

17) a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) geht nicht, da bei einer ungeraden Funktion f auch grad(f) ungerade ist

→ G_f "von links unten nach rechts oben" oder umgekehrt

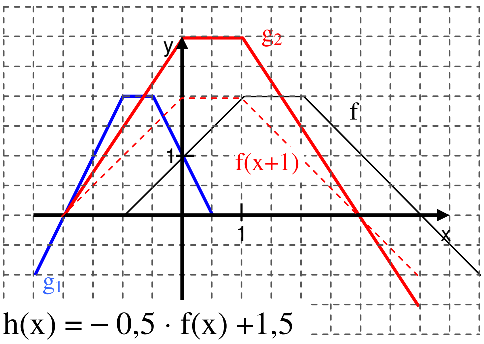
G_f ist bei ganzrat. Fkt zusammenhängend

→ Schnittpkt mit x-Achse

18) Nullstellen der Sinusfunktion: $3x + \frac{\pi}{4} = k \cdot \pi$; kleinste für k = 1 und k = 2 →

$k = 1 \rightarrow 3x + \frac{\pi}{4} = \pi \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}\pi$; $\quad k = 2 \rightarrow 3x + \frac{\pi}{4} = 2\pi \Rightarrow x_2 = \frac{7}{12}\pi$;

19) a)



b) $h(x) = -0{,}5 \cdot f(x) + 1{,}5$

20) a) $g(x) = 27 \cdot 3^x = 3^3 \cdot 3^x = 3^{x+3} = f(x+3)$

→ Verschiebung um 3 „nach links“ (parallel zur x-Achse)

b) $f(-2) = 3^{-2} = 1/9$

→ Verschiebung um 1/9 „nach unten“ (parallel zur y-Achse)

21) a) $(x + 2{,}5)^2$ $\qquad$ b) $\frac{1}{4}(x+4)(x+1)$ $\qquad$ c) $(x-2)^2 (x+0{,}5)^2 (x-1)$

d) Ansatz: $f(x) = a \cdot (x - 2)^n$ wobei n = 4, 6 … (für n = 2 ist G_f in Umgebung der Nst zu flach)

$P(1|-0{,}5) \in G_f \rightarrow -0{,}5 = a \cdot (-1)^n = a \cdot 1$ *(n gerade)* $\rightarrow a = -0{,}5$

$P(0{,}5|-2{,}5) \rightarrow -2{,}5 = -0{,}5(0{,}5 - 2)^n \qquad \rightarrow (-1{,}5)^n = 5$

n gerade $\rightarrow 1{,}5^n = 5 \rightarrow n = \log_{1,5} 5 = 3{,}96 \approx 4$ $\qquad$ Ablesegenauigkeit $\Rightarrow n = 4$

oder Testen von n = 2, 4,6 beim Punkt P → *n = 4 passt als einziger Exponent im Rahmen der Ablesegenauigkeit*

Also: $f(x) = -0{,}5(x - 2)^4$

e) $(x-1)^2 (x+1)^4$ $\qquad$ f) $a \cdot (x+0{,}5)^2 (x-1{,}5)^2$ $\qquad a \cdot 1^2 \cdot 1^2 = 2 \Rightarrow a = 2$

g) $\sin(\pi \cdot x) + 1$ $\qquad$ h) $f(x) = a\,x\,(x - \pi)(x + \pi)$; $f(\frac{\pi}{2}) = a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 3\,\frac{\pi}{2} = 2 \Rightarrow a = \frac{16}{3\pi^3}$

i) $-2 \sin x$ $\qquad$ k) $0{,}5 \sin(2x) + 0{,}5$ $\qquad$ l) $\sin(x - \frac{\pi}{4})$ $\qquad$ m) $-x^3$ $\qquad$ n) $(x+2)^3$ $\qquad$ o) $(x+3{,}5)^3 + 2$

p) $1{,}5^x$ $\qquad$ q) $2 \cdot 0{,}5^x = 2 \cdot 2^{-x}$ $\qquad$ r) $2^x + 0{,}5$; $\quad$ s) $f(x) = 3x + t$; $Q(-2{,}5|3)$ einsetzen $\rightarrow t = 10{,}5$

22) a) $\mathbf{f(-x)} = \sin(-x) - 2(-x)^3 = -\sin x + 2x^3 = -(\sin x - 2x^3) = \mathbf{-f(x)} \Rightarrow G_f$ ist psU

b) $f(-x) = 0{,}25^{-x} + 4^{-x} = 4^x + \left(\frac{1}{4}\right)^x = 0{,}25^x + 4^x = \mathbf{f(x)} \Rightarrow G_f$ ist asyA

23) a) keine $\quad$ b) psU $\quad$ c) keine ($D_f = \mathbb{R}_0^+$) $\quad$ d) psU $\quad$ e) asyA $\quad$ f) keine $\quad$ g) asyA $\quad$ h) psU

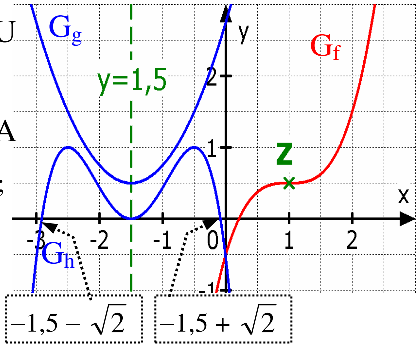
24) G_f : Versch. um 1 nach links und 0,5 nach unten $\rightarrow \tilde{f}(x) = x^3$; $G_{\tilde{f}}$ ist psU

$\rightarrow G_f$ ist punktsymmetrisch zum Zentrum Z(1| 0,5) ;

G_g und G_h : Versch. um 1,5 nach rechts $\rightarrow \tilde{g}(x) = x^2 + 0,5$; $G_{\tilde{g}}$ ist asyA

$\tilde{h}(x) = -x^4 + 2x^2$; $G_{\tilde{h}}$ ist asyA; $\tilde{h}(x) = -x^2(x^2-2) = -x^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$;

$\rightarrow$ G_g und G_h sind achsensymmetrisch zu x = – 1,5



25) a) $\log_a 6x + \log_a x^2 - 3\log_a 2x = \log_a \frac{6x \cdot x^2}{(2x)^3} = \log_a \frac{6x^3}{8x^3} = \log_a \frac{3}{4}$

b) $\log_{a^2}\left(\sqrt[5]{a^6}\right) = \log_{a^2} a^{\frac{6}{5}} = \frac{3}{5}$ $\quad \left((a^2)^x = a^{\frac{6}{5}} \Rightarrow 2x = \frac{6}{5} \right)$

26) a) $\lg\sqrt{x} = 6 + \lg x^2$

$-6 = \lg\frac{x^2}{\sqrt{x}} = \lg x^{1,5}$

$\Rightarrow 1,5 \cdot \lg x = -6$

$\Rightarrow \lg x = -4 \Rightarrow x = 10^{-4}$

b) $3^{2x} = 2 \cdot 5^{x+1}$

$9^x = 2 \cdot 5^x \cdot 5$

$\left(\frac{9}{5}\right)^x = 10$

$\Rightarrow x = \log_{1,8} 10 \approx 3,917$

27) a) $5y_0 = y_0 \cdot 1,23^x$

$\Rightarrow 5 = 1,23^x$

$\Rightarrow x = \log_{1,23} 5 = 7,774 \ldots$

Es dauert ca. 7,77 Stunden

b) $93349 = 50\,000 \cdot (1+p)^x$

$\Rightarrow 1+p = \sqrt[15]{\frac{93349}{50000}} = 1,042499\ldots$

$\Rightarrow p \approx 4,25\ \%$

28) a) $f(x) = m \cdot x + t$; $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{95-67}{65-40} = \frac{28}{25} = 1,12$; $f(x) = 1,12 \cdot x + t$

P (40 | 67) einsetzen : $67 = 1,12 \cdot 40 + t \Rightarrow t = 22,2$; also $f(x) = 1,12 \cdot x + 22,2$

b) $f(x) = b \cdot a^x$; P einsetzen $\rightarrow$ I) $67 = b \cdot a^{40}$; Q einsetzen $\rightarrow$ II) $95 = b \cdot a^{65}$

II / I : $\frac{\text{II}}{\text{I}} : \frac{95}{67} = \frac{b \cdot a^{65}}{b \cdot a^{40}} = a^{25} \Rightarrow a = \sqrt[25]{\frac{95}{67}} = \left(\frac{95}{67}\right)^{\frac{1}{25}} = 1,01406 \ldots$

a in I: $b = \frac{67}{a^{40}} = 38,3209 \ldots$ also näherungsweise : $f(x) = 38,321 \cdot 1,014^x$

29) $f(x) = \dfrac{\frac{12}{x^3} - \frac{1}{x^4} - 3}{5 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{0-0-3}{5+0+0} = -\frac{3}{5}$

30) a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -2$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$; unbestimmte Divergenz für $x \rightarrow -\infty$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

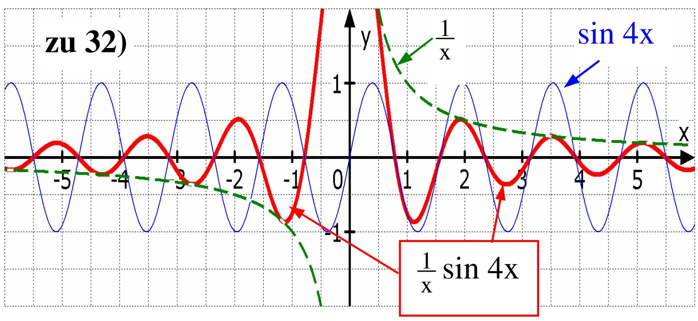
31) a) z.B.: $f(x) = 2^x$ b) z.B.: $f(x) = 0,9^x + 0,5$ c) z.B.: $f(x) = \frac{x^2}{2x^2+1}$ oder $f(x) = \frac{1}{x^2} + 0,5$

d) z.B.: $f(x) = -(x-2)(x+1)(x-3)^2$ *(grad(f) = geradeZahl!)* d) z.B.: $f(x) = 3 \cdot \sin(x) - 4$

32) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin 4x = 0$

denn: g(x) = **sin 4x divergiert** zwar **unbestimmt,**

ist aber **beschränkt,** $\rightarrow$ " $\frac{1}{x}$ gewinnt "



33) f gibt die Summe der ersten x Rechtecksflächen an:

$f(0) = 1$; $f(1) = 1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$; $f(2) = 1\frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ usw.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$ = Fläche des Gesamtrechtecks