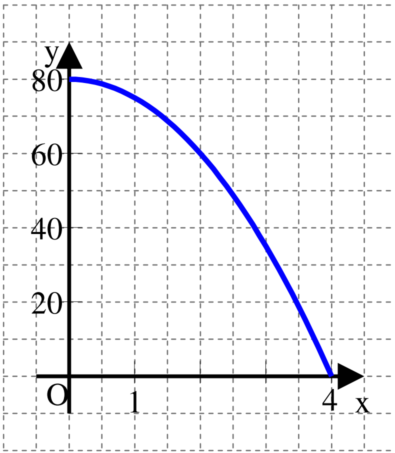
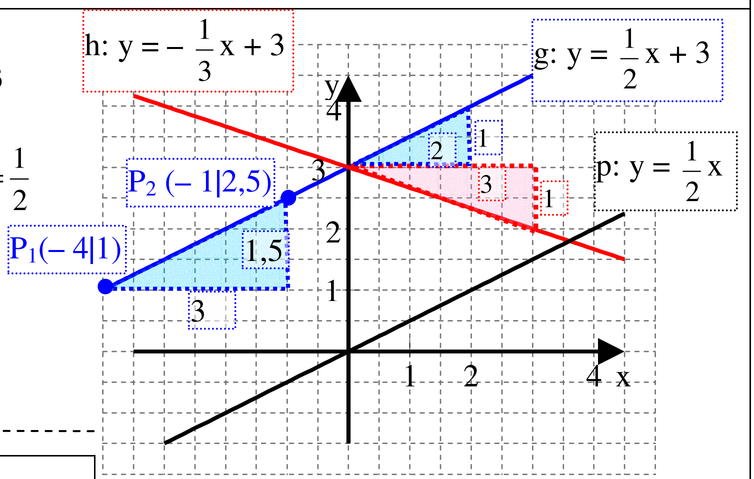
<table>
<tr><th>Gymnasium Stein</th><th>Grundwissenkatalog Mathematik</th><th>Jahrgangsstufe 8</th></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Wissen/Können</th><th>Aufgaben und Beispiele</th></tr>
<tr><td>Rechnen mit
Bruchtermen
(Grundrechenarten)</td><td>Prinzipiell die gleichen Regeln wie bei Bruchzahlen!
z.B. zum Addieren und Subtrahieren: Erweitern auf den Hauptnenner
und vereinfachen: $\frac{b}{2a-b}+\frac{a-b^2}{2ab-b^2}=\frac{b^2+a-b^2}{b(2a-b)}=\frac{a}{2ab-b^2}$</td></tr>
<tr><td>Lösen von
Bruchgleichungen</td><td>Multiplikation mit dem Hauptnenner; danach kürzen: $\frac{x-1}{x}=2-\frac{x}{x+1}$; $\mid\cdot x(x+1)$ G = ℚ, D = ℚ\{-1 ; 0}
$(x-1)(x+1)=2x(x+1)-x^2$;
Auflösen nach x: ... $x=-\frac{1}{2}\in D$ $L=\{-\frac{1}{2}\}$</td></tr>
<tr><td>Einfacher Spezialfall:
Auf beiden Seiten der Gleichung nur
je ein Bruch</td><td>i.A.: Kreuzweise multiplizieren
(nur sinnvoll bei "teilerfremden Nennern"; vgl. Wh.aufgabe Nr. 3o)
$\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x}$;   G = ℚ
D = ℚ\{ 0 ; 3 }
$2x = 3(x-3) \Leftrightarrow x=9$ L = {9}</td></tr>
<tr><td>Auflösen von
Formeln</td><td>Auflösen von $D=\frac{F}{s-s_0}$ nach s : $D(s-s_0)=F \Rightarrow \ldots \Rightarrow s=\frac{F}{D}+s_0$
Auflösen von $R=\frac{U-U_0}{\frac{U_0}{R_{ges}}}$ nach $\boldsymbol{R_{ges}}$: $R\cdot\frac{U_0}{R_{ges}}=U-U_0 \Rightarrow R_{ges}=R\cdot\frac{U_0}{U-U_0}$</td></tr>
<tr><td>Funktionen
Zur Angabe einer Funktion gehören
• Definitionsmenge D
• Funktionsvorschrift:
Einer Größe x wird <u>eindeutig</u> eine Größe y zugeordnet: $x \mapsto y$
○ Funktionsterm f(x)
○ Funktionsgleichung y = f(x)
Aus diesen Angaben ergibt sich die
• Wertemenge W</td><td>Beispiel: Ein Stein fällt aus einer Höhe von 80 m in 4 s zu Boden.
Für x = Zeit in Sekunden gilt hier also
D = [0 ; 4]
Jedem Zeitpunkt x kann <u>eindeutig</u> eine Höhe y zugeordnet werden!
Wertetabelle (z.B. aus Experiment):
<table><tr><td>x in s</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>y in m</td><td>80</td><td>75</td><td>60</td><td>35</td><td>0</td></tr></table>$f(x)=80-5x^2$
$y=80-5x^2$ (Zuordnung hier als Gleichung)


W = [0 ; 80]   („Menge der y“)</td></tr>
<tr><td>Wichtigster Spezialfall:
Die lineare Funktion
• Funktionsgleichung
$y=m\cdot x+t$
• Steigung $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
• y-Abschnitt t
• Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade</td><td>Bsp.: g: $y=\frac{1}{2}x+3$
$m=\frac{2{,}5-1}{-1-(-4)}=\frac{1{,}5}{3}=\frac{1}{2}$
t = 3
Zeichnen z.B. mit y-Abschnitt und Steigungsdreieck

</td></tr>
<tr><td>• Spezialfall:
Die direkte Proportionalität</td><td>$y=m\cdot x \Leftrightarrow \boxed{\frac{y}{x}=m=\text{const.}}$; Kurzschreibweise : $y\sim x$
Der Graph ist eine Gerade durch den Ursprung (t = 0 ; im Bsp. Gerade p)</td></tr>
</table>

Hinweis: zum Thema „lineare Funktionen“ findet man ein ausführlicheres Arbeitsblatt auf unserer Homepage: www.gymnasium-stein.de *(unter Fachschaft Mathematik)*

Einfache gebrochen-rationale Funktionen

- (maximale) Definitionsmenge D
- Achsenschnittpunkte
- Asymptoten

$f(x) = \dfrac{2-x}{2x+4}$

„verboten“ ist „Nenner = 0“

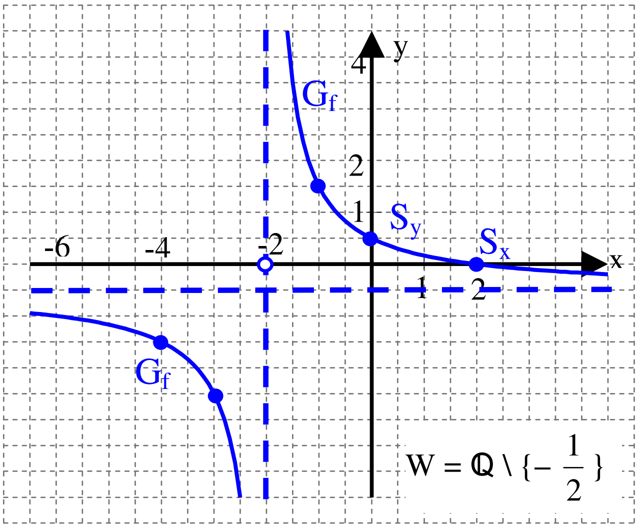
Also: $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$\rightarrow D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$

$\rightarrow$ senkrechte Asymptote: $x = -2$

$\left.\begin{array}{l} S_x : y = 0 \\ \Leftrightarrow\ 2 - x = 0 \\ \Leftrightarrow x = 2 \end{array}\right\}\ S_x(2|0)$

$\left.\begin{array}{l} S_y : x = 0 \\ \Rightarrow y = \dfrac{2-0}{0+4} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}\ S_y(0|\tfrac{1}{2})$



$\left.\begin{array}{l} f(1000) = -\ 0{,}498\ldots \approx -0{,}5 \\ f(-1000) = -0{,}502\ldots \approx -0{,}5 \end{array}\right\}$ waagrechte Asymptote: $y = -0{,}5$

Zum Skizzieren des Graphen genügen jetzt wenige zusätzliche Funktionswerte, z.B.: $f(-4) = -1{,}5$; $f(-3) = -2{,}5$; $f(-1) = 1{,}5$

Spezialfall:
Die **indirekte Proportionalität**

Funktionsgleichung $f(x) = \dfrac{c}{x}$

bzw : $y = \dfrac{c}{x}$

Die **Graphen** heißen **Hyperbeln**

$y = \dfrac{c}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{y \cdot x = c = \text{const.}}$

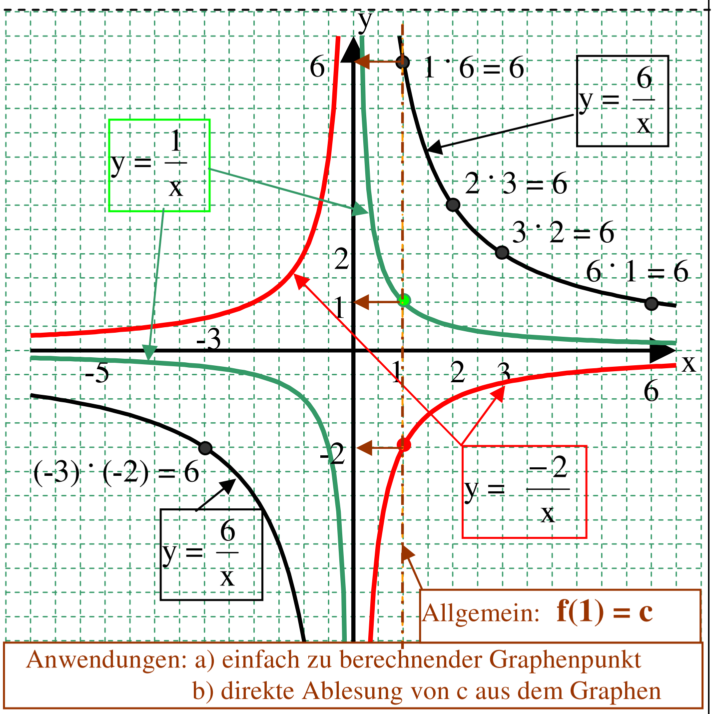
(Im nebenstehenden Beispiel für c = 6 an einigen Punkten des Graphen demonstriert)

$y = \dfrac{c}{x} = c \cdot \dfrac{1}{x}$

$\rightarrow$Kurzschreibweise:

$y \sim \dfrac{1}{x}$

Asymptoten des Graphen: Achsen des Koordinatensystems



Lineare Ungleichungen

Umkehrung des Ungleichungszeichens bei Multiplikation mit negativer Zahl bzw. Division durch negative Zahl

auch graphisches Lösungsverfahren

Intervalle als Lösungsmenge

a) $2x + 1 < 3 \quad | -1$

$2x < 2$

$x < 1$

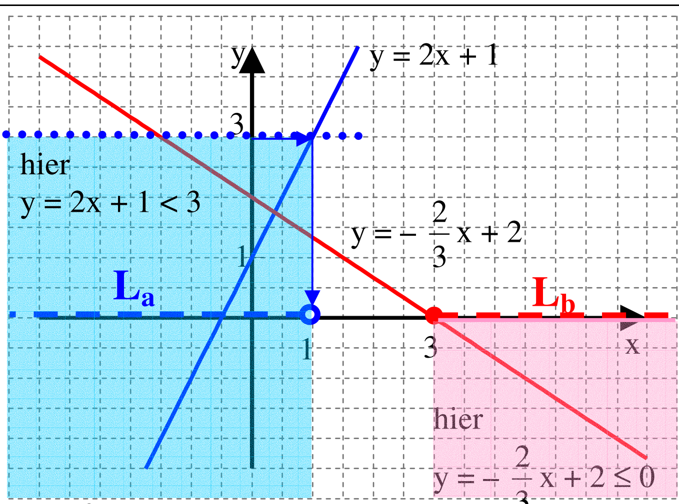
$L_a =]\,\infty\,;\,1\,[$

b) $-\dfrac{2}{3}x + 2 \leq 0$

$-\dfrac{2}{3}x \leq -2 \quad | \cdot(-\dfrac{3}{2})$

$x \geq 3$

$L_b = [\,3\,;\,\infty\,[$



oder: $-\dfrac{2}{3}x + 2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq \dfrac{2}{3}x \quad \Leftrightarrow \quad 3 \leq x \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 3$

Lineare Gleichungssysteme

- Rückführen auf eine Gleichung mit einer Variablen durch Elimination der anderen Variablen (z.B. mit Einsetzverfahren)

I) $2x - y = 3$
II) $x - 3y = -6$

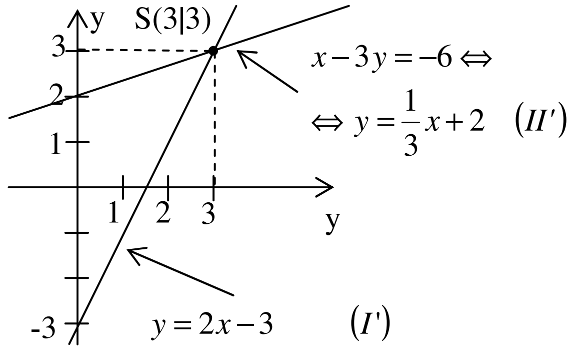
I) ⇒ $y = 2x - 3$ (I´)

y in (II) : $x - 3(2x - 3) = -6$

…….. $\rightarrow x = 3$

x in I´ $\rightarrow y = 3$

$L = \{ (3 \mid 3) \}$



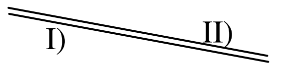
- Graphische Lösung

Jede Gleichung beschreibt eine Gerade. Die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden stellen die Lösung des Gleichungssystems dar.

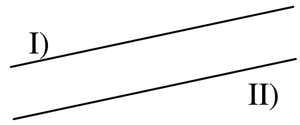
- Sonderfälle für das allgemeine System

I) $ax + by + c = 0$
II) $dx + ey + f = 0$

a) Die beiden Geraden sind identisch ⇔
⇔ Gleichungssystem ergibt allgemeingültige Gleichung ⇔ $L = \{(x|y) \mid ax + by + c = 0\}$



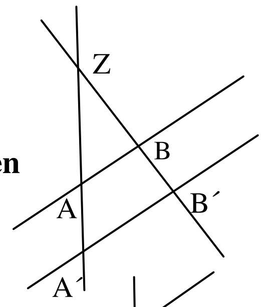
b) Die beiden Geraden sind parallel ⇔
⇔ Gleichungssystem ergibt Widerspruch ⇔ $L = \{ \}$



- **1. Strahlensatz:**
  Werden die zwei Geraden einer Geradenkreuzung von zwei **parallelen** Geraden geschnitten, dann **verhalten sich** zwei beliebige **Abschnitte auf der einen Kreuzungsgeraden** genauso **wie die entsprechenden Abschnitte** auf der **anderen Kreuzungsgeraden.**

  hier: $AB \parallel A'B' \Rightarrow \overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$

  und $\overline{AA'} : \overline{ZA} = \overline{BB'} : \overline{ZB}$ usw.

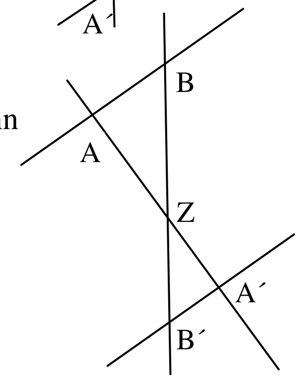


Bsp.1)
(zur "V-Figur")
$\overline{ZA'} = 8\text{cm}$,
$\overline{ZA} = 6\text{cm}$
$\overline{BB'} = 3\text{cm}$
$\overline{ZB} = ?$

$[\overline{ZB} = 9\text{cm}]$

- **2. Strahlensatz:**
  Die ausgeschnittenen **Parallelstrecken verhalten sich** dann genauso **wie die Entfernungen entsprechender Streckenendpunkte zum Kreuzungspunkt.**

  hier z.B.: $AB \parallel A'B' \Rightarrow \overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$



Bsp.2)
(zur „X-Figur")
$\overline{ZA'} = 5\text{cm}$,
$\overline{AA'} = 9\text{cm}$
$\overline{A'B'} = 7\text{cm}$
$\overline{AB} = ?$

$[\overline{AB} = 5{,}6\text{cm}]$

Umkehrung des 1. Strahlensatzes:
Verhalten sich zwei Abschnitte auf der einen Kreuzungsgeraden genauso wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Kreuzungsgeraden, dann sind die zwei **schneidenden Geraden parallel**.

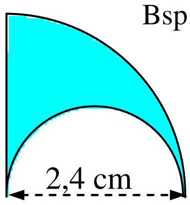
Ähnlichkeit

Zwei Figuren heißen **ähnlich**, wenn sie in allen entsprechenden Winkeln und im Verhältnis aller entsprechenden Seiten übereinstimmen.
Zwei **Dreiecke** sind z.B. bereits dann ähnlich, wenn sie in **zwei Winkeln** übereinstimmen.
In ähnl. Figuren gilt: entsprechende Strecken haben das **gleiche Längenverhältnis (k)**
entsprechende Flächen haben das **gleiche Flächenverhältnis (k^2 !)**

Kreis

- Flächeninhalt: $\mathbf{A = r^2 \pi}$
- Umfang: $\mathbf{U = 2 r \pi}$

Bsp.: Berechne Flächeninhalt und Umfang der nebenstehenden Figur!



$$A = \frac{1}{4} \cdot (2{,}4\text{cm})^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot (1{,}2\text{cm})^2 \cdot \pi = 0{,}72\text{cm}^2 \cdot \pi \approx 2{,}3\ \text{cm}^2$$

$$U = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2{,}4\text{cm} \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot 2{,}4\text{cm} \cdot \pi + 2{,}4\text{cm} = 2{,}4\text{cm}\,(\pi + 1) \approx 9{,}9\text{cm}$$

Laplace – Wahrscheinlichkeit

Wenn alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind, dann gilt für jedes Ereignis A:

$$\text{Wahrscheinlichkeit von A} = \frac{\text{Anzahl der für A } \textbf{günstigen} \text{ Ergebnisse}}{\text{Anzahl } \textbf{aller möglichen} \text{ Ergebnisse}}; \quad \text{kurz: } \boxed{\mathbf{P(A)} = \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{\Omega}|}}$$

Bsp.: In einer „Urne" befinden sich 6 grüne und 14 rote Kugeln.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei zufälliger einmaliger Ziehung eine rote Kugel zu ziehen? $[\frac{14}{20} = 70\%]$