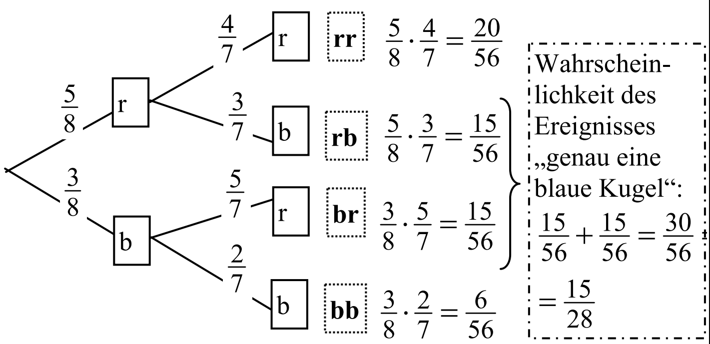
Gymnasium Stein	Grundwissenkatalog Mathematik	Jahrgangsstufe 9

Wissen / Können	Beispiele
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ natürliche Zahlen $\subseteq$ ganze Z. $\subseteq$ rationale Z. $\subseteq$ reelle Z.	$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, aber $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $1{,}4 \notin \mathbb{Z}$, aber $1{,}4 \in \mathbb{Q}$; $-3 \notin \mathbb{N}$, aber $-3 \in \mathbb{Z}$
Quadratwurzel: $\sqrt{a}$ ist diejenige nicht negative Zahl, deren Quadrat a ergibt, also $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ (gilt nur für $a \geq 0$) Umgekehrt: $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$ (gilt auch für $a < 0$) Allgemein: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ist die nicht negative Lösung der Gleichung $x^n = a$ (speziell: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; negativer Exponent $\Leftrightarrow$ Kehrwert	$\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{(-6)^2} = 6$, $\sqrt{(2x-3)^2} = \lvert 2x-3 \rvert = \begin{cases} 2x-3, \text{ falls } x \geq 1{,}5 \\ -(2x-3), \text{ falls } x < 1{,}5 \end{cases}$ $\sqrt[3]{8} = 2$ (denn $2^3 = 8$) $0{,}0001^{\frac{3}{4}} = (0{,}0001^{\frac{1}{4}})^3 = 0{,}1^3 = 0{,}001$ $25^{\frac{3}{2}} = (25^{\frac{1}{2}})^3 = (\sqrt{25})^3 = 5^3 = 125$ $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$; $2{,}4 \cdot 10^{-3} = 0{,}0024$
Definitionsmenge von Wurzeltermen Prinzip: Der Radikand (=Term unter der Wurzel) darf nicht negativ sein	$\sqrt{x}$ ist definiert für $x \geq 0$ $\sqrt{2x-4}$ ist definiert für $x \geq 2$; denn $2x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ $\frac{1}{\sqrt{4-2x}}$ ist definiert für $x < 2$ *(zusätzlich: Nenner $\neq 0$)*
Rechenregeln für Quadratwurzeln $\boxed{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}}$ $\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}}$ $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ Allgemein: **Rechenregeln für Potenzen**: $\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$ $\boxed{a^n : a^m = a^{n-m}}$ $\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$ Für Termvereinfachungen: **Potenzschreibweise verwenden!**	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 6} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$; **Achtung**: $\sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4$ **!** $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = x^{\frac{3}{6}+\frac{4}{6}} = x^{\frac{7}{6}}$ $(= \sqrt[6]{x^7})$ $\sqrt{x : \sqrt[5]{x}} = (x^1 : x^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{2}} = (x^{1-\frac{1}{5}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{5}} (= \sqrt[5]{x^2})$
Teilweises Radizieren **Rationalmachen des Nenners**	$\sqrt{32a^2b^8c^3} = \sqrt{16 \cdot 2 \cdot a^2 (b^4)^2 \cdot c^2 \cdot c} = 4 \lvert a \rvert b^4 c \sqrt{2c}$ $\frac{21}{2\sqrt{3}} = \frac{21\sqrt{3}}{2(\sqrt{3})^2} = \frac{21\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$
Binomische Formeln: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ *„umgekehrte" Anwendung beim Faktorisieren!*	$(2x + 7y)^2 = 4x^2 + 28xy + 49y^2$ $4x^2 - 49 = (2x-7)(2x+7)$ $5x^2 - 10x + 5 = 5(x^2 - 2x + 1) = 5(x-1)^2$
Zusammengesetzte Zufallsexperimente Veranschaulichung in Baumdiagrammen; Pfadregeln: • Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses = = Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades • Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses = = Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle Pfade, die zu dem Ereignis gehören Wahrscheinlichkeit des **Gegenereignisses** $\overline{E}$: $\mathbf{P(\overline{E}) = 1 - P(E)}$	Aus einer Urne mit Inhalt 5 rote Kugeln und 3 blaue Kugeln werden nacheinander 2 Kugeln gezogen  P(mindestens eine rote K.) = 1 − P(gar keine rote K.) = $= 1 - P(bb) = 1 - \frac{6}{56} = \frac{25}{28}$

Lösen von **quadratischen Gleichungen**
$ax^2 + bx + c = 0$
mit der **Lösungsformel:** $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
(„Mitternachtsformel")

$-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} = 0$; $\quad G = \mathbb{R}$

$x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{5}{2})}}{2 \cdot (-\frac{1}{2})}$; $x_1 = 1$; $x_2 = 5$; L= {1;5}

Zerlegung in **Linearfaktoren;** *Anwendung: Nullstellenform quadratischer Funktionen, s.u.*

$-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \cdot (x-1) \cdot (x-5)$

allgemein: $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Die **Diskriminante $D = b^2 - 4ac$** entscheidet über die Anzahl der Lösungen:
$D > 0 \Leftrightarrow$ zwei Lösungen
$D = 0 \Leftrightarrow$ genau eine Lösung
$D < 0 \Leftrightarrow$ keine Lösung

$x^2 + 3x + 5 = 0; \quad G = \mathbb{R};$
$D = 3^2 - 20 < 0 \quad \Rightarrow \quad L = \{\,\}$

Die Formel ist in Spezialfällen nicht nötig:

1) $c = 0$ $\rightarrow$ x ausklammern:
$ax^2 + bx = 0 \quad \rightarrow \quad x\,(ax + b) = 0$
$x_1 = 0; \quad x_2 = -\frac{b}{a}$

$2x^2 + 5x = 0$; $G = \mathbb{R}$
$x \cdot (2x + 5) = 0;$
$x_1 = 0; \quad x_2 = -2{,}5; \qquad L = \{-2{,}5\,;\,0\}$

2) $b = 0$ $\rightarrow$ Auflösen nach x^2
$\rightarrow$ Wurzel ziehen
$ax^2 + c = 0 \rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$; $x_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ mit $-\frac{c}{a} \geq 0$

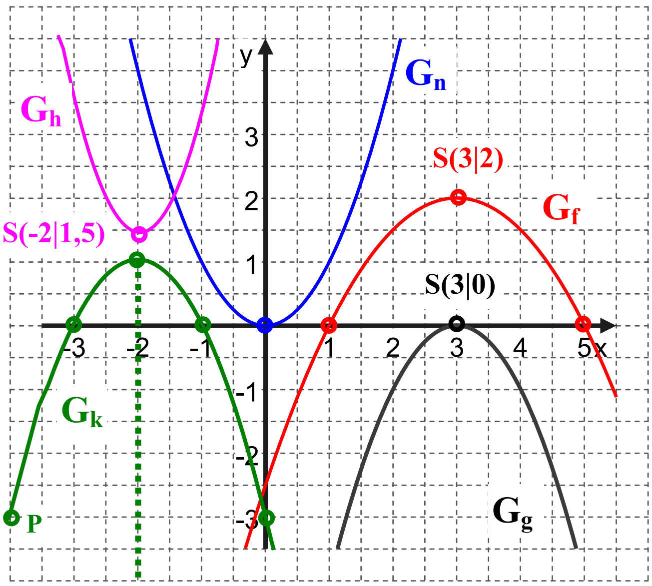
$4x^2 - 5 = 0; \quad G = \mathbb{R} \quad ; \qquad L = \{-\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2}\}$
$x^2 + 4 = 0; \quad G = \mathbb{R}$;
$x^2 = -4$; Widerspruch $\Rightarrow \quad L = \{\,\}$

3) Binomische Formeln sollten erkannt werden

$x^2 + 6x + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+3)^2 = 0$; $\quad L = \{-3\}$

Die quadratischen Funktionen und ihre Graphen (**Parabeln**)

Normalform:	$y = ax^2 + bx + c$
Scheitelform:	$y = a(x - x_s)^2 + y_s$
Nullstellenform:	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$



Beispiel: $\boxed{f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}}$ (**Normalform**)

Quadratische Ergänzung $\rightarrow$ **Scheitelform**:

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} \quad = \quad -\frac{1}{2}(x^2 - 6x) - \frac{5}{2} =$

$= -\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) - \frac{5}{2} =$

$= -\frac{1}{2}\left[(x-3)^2 - 9\right] - \frac{5}{2} \quad = \quad -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$;

also Scheitelpunkt: **S(3 | 2)**

Berechnung der Nullstellen mit Ansatz $f(x) = 0$
(siehe oben: „quadratische Gleichungen")

$\rightarrow$ **Nullstellenform**: $\quad y = -\frac{1}{2} \cdot (x-1) \cdot (x-5)$

Falls Nullstellen existieren *(Diskriminante ≥ 0)*, kann man den Scheitelpunkt auch über die **Symmetrie** der Parabel bestimmen, hier:

$x_s = \frac{1+5}{2} = 3$ *(Mittelwert von x_1 und x_2)*

auch ohne Nullstellen folgt aus der Symmetrie: $x_s = -\frac{b}{2a}$; hier: $x_s = -\frac{3}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = 3$

$\Bigg\}\; y_s = f(x_s) = f(3) = 2$

Normalparabel: $\boxed{n(x) = x^2}$; $\quad \boxed{g(x) = -(x-3)^2}$ $\quad$ ($a < 0 \quad \Leftrightarrow$ Öffnung nach unten)

$\boxed{h(x) = 2(x+2)^2 + 1{,}5}$ $\quad$ ($|a| > 1 \quad \Leftrightarrow$ „schlanker" als Normalparabel)

$\boxed{k(x) = -(x+1)(x+3)}$ Nullstellen: $x_1 = -1$; $x_2 = -3$; Scheitel: $x_s = \frac{1}{2}(-1 + (-3)) = -2$; $y_s = k(-2) = 1$

$k(0) = -3 \rightarrow S_y(0\,|\,-3)$ $\quad$ Auch der bezüglich $x = -2$ zu S_y symmetrische Punkt $P(-4\,|\,-3)$ liegt auf der Parabel.

Sätze im rechtwinkligen Dreieck:

Kathetensätze: $\boxed{a^2 = pc}$ $\boxed{b^2 = qc}$

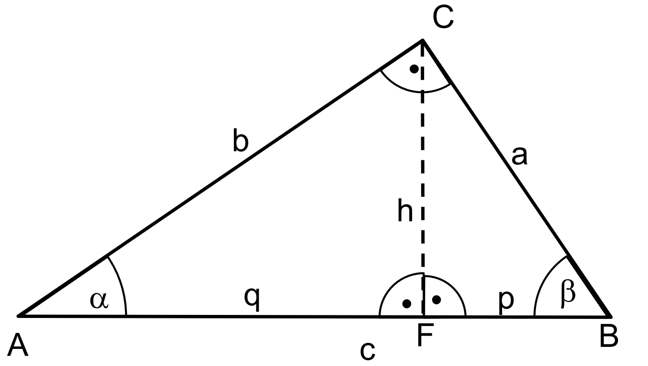
Höhensatz: $\boxed{h^2 = pq}$

(Bezeichnungen wie in der Figur rechts)

> Am wichtigsten ist der **<u>Satz des Pythagoras:</u>**
> **Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten**.
> Hier : $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$

Umkehrung des „Pythagoras“:

Gilt in einem Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist es rechtwinklig.*(Bsp.: a = 3 cm; b = 4 cm; c = 5cm)*



Aufgabe: Gegeben: p = 3cm, a = 4cm. Berechne b, c, und den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC !

$$[\, b = \frac{4}{3}\sqrt{7}\text{cm},\ c = \frac{16}{3}\text{cm},\ A = \frac{1}{2}ab = \frac{8}{3}\sqrt{7}\text{cm}^2 \,]$$

Anwendungen des „Pythagoras“ z.B. bei :

Diagonale im Quadrat: $d = a\sqrt{2}$

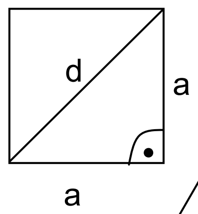
Höhe im gleichseitigen Dreieck:

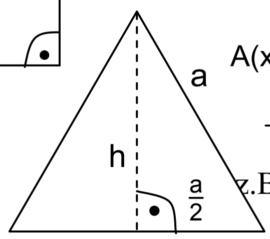
$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

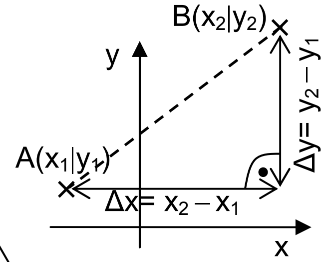
Entfernung zweier Punkte $A(x_1|\,y_1)$ und $B(x_2|\,y_2)$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Einprägen der Bilder ist besser als Auswendiglernen!

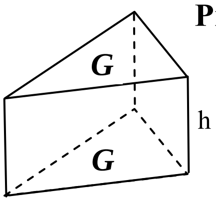






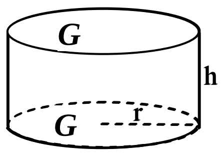
z.B.: $A(-3|1)$; $B(2|7)$ $\rightarrow$ $\overline{AB} = \sqrt{61}$

Prisma und Zylinder:



Volumen: $\boxed{\mathbf{V = G \cdot h}}$

Mantelfläche: $\boxed{\mathbf{M = u \cdot h}}$

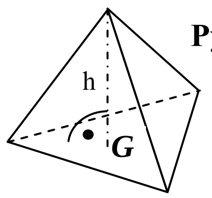


Oberfläche : $\mathbf{O = 2\,G + M}$

(G = Grundfläche; u = Umfang der Grundfläche)

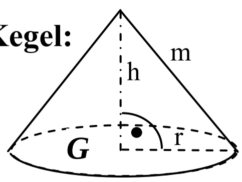
speziell **Zylinder**: $\mathbf{V = r^2\pi\, h;}$ $\mathbf{M = 2r\pi\, h}$

Pyramide und Kegel:



$$\boxed{\mathbf{V = \frac{1}{3} G \cdot h}}$$

$\mathbf{O = G + M}$



speziell **Kegel**: $\mathbf{V = \frac{1}{3} r^2\pi\, h;}$ $\mathbf{M = r\,\pi\, m}$

„Pythagoras“ für die Mantellinie: $m = \sqrt{r^2 + h^2}$

Berechne Volumen und Oberfläche für folgende Körper, die alle die Höhe 3,0 cm haben:

a) **Prisma** mit gleichseitigem Dreieck als Grundfläche (Seitenlänge = 4,0 cm)

b) **Zylinder** mit Grundkreisradius r = 4,0 cm

c) **Kegel** mit Grundkreisradius r = 4,0 cm

a) $G_P = \frac{1}{2} \cdot 4\text{cm} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\text{cm}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\text{cm}^2$

$V_P = 4\sqrt{3}\text{cm}^2 \cdot 3\text{cm} = 12\sqrt{3}\text{cm}^3 \approx 21\text{cm}^3$

$O_P = 2 \cdot 4\sqrt{3}\text{cm}^2 + 3 \cdot 4\text{cm} \cdot 3\text{cm} \approx 50\text{cm}^2$

b) $G_Z = (4\text{cm})^2 \cdot \pi = 16\pi\ \text{cm}^2$

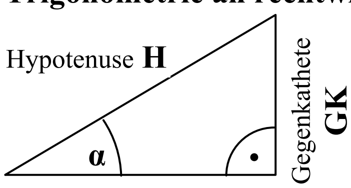
$V_Z = 16\pi\ \text{cm}^2 \cdot 3\text{cm} = 48\pi\text{cm}^3 \approx 151\text{cm}^3$

$O_Z = 2 \cdot 4\text{cm} \cdot \pi \cdot 3\text{cm} + 2 \cdot 16\pi\ \text{cm}^2 = 56\pi\ \text{cm}^2 \approx 180\text{cm}^2$

c) $V_K = \frac{1}{3} 16\pi\ \text{cm}^2 \cdot 3\text{cm} = 16\pi\ \text{cm}^3 \approx 50\text{cm}^3$

$O_K = 16\pi\ \text{cm}^2 + 4\text{cm} \cdot \pi \cdot \sqrt{(4\text{cm})^2 + (3\text{cm})^2} = 36\,\pi\ \text{cm}^2 \approx 113\ \text{cm}^2$

Trigonometrie an rechtwinkligen Dreiecken



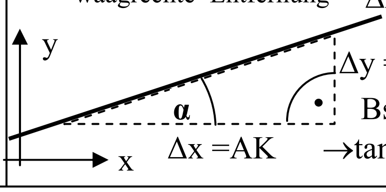
$$\boxed{\mathbf{\sin\alpha = \frac{GK}{H}}} \qquad \boxed{\mathbf{\cos\alpha = \frac{AK}{H}}} \qquad \boxed{\mathbf{\tan\alpha = \frac{GK}{AK}}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

“trigonometrischer Pythagoras”: $\mathbf{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

tan 45° = 1 ; (α = 45°→ gleichschenkl. Dreieck)

Steigung einer Geraden (praktisch z.B.: Straße)

$$m = \frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{waagrechte Entfernung}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{GK}{AK} = \tan\alpha$$



Bsp.: Steigung 10% $\rightarrow \tan\alpha = 0{,}1 \rightarrow \alpha \approx 5{,}7°$